

HAUPTAUFSÄTZE

Über Bewegungen eines Schwingers unter dem Einfluß von Schwarz-Weiß-Regelungen.

Herrn Prof. Dr. L. Prandtl zum 70. Geburtstag.

Ergebnisse gemeinsamer Arbeiten von I. Flügge-Lotz, H. F. Hodapp, K. Klotter, H. Meissinger
und K. Scholz.

Berichtet von Irmgard Flügge-Lotz, Berlin.

In der Technik werden aus Gründen apparativer Einfachheit oft unstetig arbeitende Regelungen gebaut, um Schwinger mit unzureichender Eigendämpfung zu verbessern. Diese Regelungen arbeiten z. B. so, daß bei positivem Ausschlagen des Schwingers eine zusätzliche konstante Rückstellkraft oder ein konstantes Rückstellmoment aufgebracht wird, bei negativem Ausschlagen dasselbe mit entgegengesetztem Vorzeichen. Deshalb gehorcht die Bewegung in zwei aufeinanderfolgenden Intervallen verschiedenen Gesetzen und muß stückweise berechnet werden, ähnlich wie Schwingungen mit Coulombscher Reibung. Das kostet viel Zeit, und es bestand deshalb ein Bedürfnis, Methoden zu entwickeln, die eine Übersicht über den Bewegungsablauf vermitteln, ohne diese stückweise Berechnung von Frequenz und Amplitude zu erfordern.

In technics for the sake of simplicity of apparatus inconstantly working regulations are very often constructed in order to rectify swings of insufficient self-dampening. These regulations f. i. are working in such a way that with regard to positive turns of the swing an additional constant force or momentum of reaction are produced; concerning negative turns the result is the same in converse order only. In consequence the motion of two successive intervals corresponds to different laws and has to be partially calculated like the vibrations in conformity with Coulomb's law of friction. This method, however, takes up much time; in consequence there has been a need to develop methods realizing a summary of the motional effect without requiring the partial calculations of frequency and amplitude.

Pour simplifier l'appareillage on emploie souvent dans la technique des régulateurs à action discontinue, destinés à améliorer les systèmes oscillants dont l'amortissement propre n'est pas suffisant. Ces régulateurs travaillent p. exp. de telle façon, que les élongations positives de l'oscillation produisent une force ou un moment réactionnels constants, tandis que les élongations négatives conduisent aux mêmes effets, mais de signe opposé. Par conséquent, dans les deux intervalles successifs le mouvement sera régi par deux lois différentes et doit être calculé par fractions, comme les oscillations avec le frottement de Coulomb. Cela exige beaucoup de temps et a conduit à développer les méthodes nouvelles qui permettent un aperçu global du mouvement sans avoir recours aux calculs fractionnés de fréquence ou de l'amplitude.

Для упрощения аппаратуры в технике часто применяются регуляторы прерывистого действия, целью которых является улучшение колебательных систем с недостаточным собственным затуханием. Подобные регуляторы работают напр. таким образом, что при положительном отклонении колебательной системы появляется дополнительная постоянная реакция или реактивный момент, а при отрицательном отклонении — тоже с противоположным знаком. Поэтому, в двух следующих друг за другом интервалах колебания подчиняются двум различным законам и должны вычисляться по частям, подобно колебаниям с трением Кулона. Это требует много времени и дало повод к разработке новых методов, позволяющих проследить ход движения без необходимости подобных дробных вычислений частот или амплитуды.

1. Einleitung. In verschiedenen Zweigen der Technik treten bei Störung einer Hauptbewegung Schwingungen auf, deren Eigendämpfung den Forderungen nach schnellem Abklingen nicht genügt. Um in solchen Fällen rascher auf kleine Amplituden zu kommen, hat man Regelungen geschaffen, die die Störbewegung möglichst schnell zum Verschwinden bringen. Diese Regelungen können stetig und unstetig arbeiten. Die letzteren werden als Schwarz-Weiß-Regelungen, auch als Ja-Nein-Regelungen bezeichnet. Über mehrere bisher nicht veröffentlichte Arbeiten, die sich mit der Untersuchung von Schwarz-Weiß-Regelungen befassen, soll hier berichtet werden.

2. Einläufiger Schwinger, Stellungszuordnung ohne Schaltverschiebungen. Zunächst wurde der einläufige Schwinger untersucht, dessen freie (ungeregelte) Bewegung auf Grund der Gleichung

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \quad (1)$$

verläuft. Durch ein Stellglied greifen wir in den Krafthaushalt des Schwingers ein. Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = N\beta \quad (2)$$

β ist dabei die Abweichung des Stellgliedes von seiner Null-Lage, N seine Wirksamkeit. Bei einer stetigen Regelung wäre nun β eine stetige Funktion von φ oder $\dot{\varphi}$ oder von beiden. Bei einer Schwarz-Weiß-Regelung kann β nur zwei entgegengesetzt gleiche Werte $\beta_0 \cdot \text{sgn}(\kappa_1 \varphi + \kappa_2 \dot{\varphi})$ annehmen. Die geregelte Bewegung verläuft also nach den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi} + 2\delta \dot{\varphi} + \omega^2 \varphi &= N\beta \\ \beta &= \pm \beta_0 \text{sgn}(\kappa_1 \varphi + \kappa_2 \dot{\varphi}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3).$$

Dabei ist zunächst vorausgesetzt, daß keine Schaltverschiebungen auftreten, d. h. daß dem Null-durchgang der Regelfunktion $F^* = \kappa_1 \varphi + \kappa_2 \dot{\varphi}$ auch unmittelbar der Vorzeichenwechsel der Kraft entspricht. Deshalb können wir statt mit F^* auch mit

$$F = \frac{F^*}{\kappa_1} = \varphi + \kappa \dot{\varphi}$$

arbeiten, wenn wir voraussetzen, daß $\kappa_1 > 0$ ist.

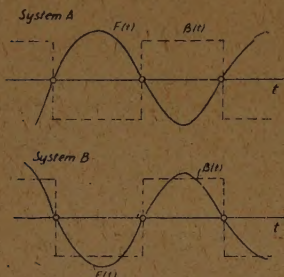


Bild 1. Verlauf der Regelfunktion F und des Stellgliedausschlags β bei Stellungszuordnung im System A und System B.

Der Möglichkeit, dem positiven Vorzeichen von F sowohl eine negative als auch eine positive Kraft zuzuordnen, entsprechen zwei verschiedene Regelsysteme (Bild 1). Ihren Sinn kann man in zwei Grenzfällen leicht einsehen:

1. Wenn κ sehr klein ist, wird die Regelfunktion $F \approx \varphi$, und $\text{sgn } F$ hat das gleiche Vorzeichen wie φ . Fassen wir nun das der zusätzlichen Kraft proportionale Glied $\pm N\beta_0 \cdot \text{sgn } F$ mit dem der Rückstellkraft proportionalen Glied $\omega^2 \varphi$ zusammen,

$$\ddot{\varphi} + 2\delta \dot{\varphi} + \omega^2 \left(\varphi \mp \frac{N\beta_0}{\omega^2} \text{sgn } \varphi \right) = 0 \dots \dots (4a),$$

so sehen wir, daß beim unteren Vorzeichen [d. h. dem negativen Vorzeichen in Gl. (3)] im Mittel eine Verstärkung der Rückstellkraft (System A), beim oberen (System B) aber eine Schwächung der Rückstellkraft eintritt, die gegebenenfalls den Schwinger labil machen kann.

2. Wenn κ sehr groß ist, wird die Regelfunktion $F \approx \kappa \dot{\varphi}$, und $\text{sgn } F$ hat das gleiche Vorzeichen wie $\dot{\varphi}$. Fassen wir nun das der zusätzlichen Kraft proportionale Glied $\pm N\beta_0 \cdot \text{sgn } F$ mit dem der Reibungskraft proportionalen Glied $2\delta \dot{\varphi}$ zusammen

$$\ddot{\varphi} + 2\delta \left(\dot{\varphi} \mp \frac{N\beta_0}{2\delta} \text{sgn } \kappa \dot{\varphi} \right) + \omega^2 \varphi = 0 \dots \dots (4b),$$

so sehen wir, daß das untere Vorzeichen (System A) im Mittel eine Verstärkung der Dämpfung hervorruft.

Beide Grenzfälle zeigen, daß eine Regelung nach System A mechanisch günstiger sein wird als eine nach System B. Die genaue Rechnung wird diese Vermutung auch für andere κ -Werte bestätigen.

Die Lösung der Gl. (4) läßt sich zusammensetzen aus den Teillösungen

$$\varphi_1 = C_1 (e^{\lambda_1 t + i\varepsilon_1} + e^{\lambda_1 t - i\varepsilon_1}) \pm \frac{N\beta_0}{\omega^2} \text{sgn } F \dots \dots (5);$$

dabei ist in jedem Intervall (Zeitraum, in dem F ein festes Vorzeichen hat) die Zeitzählung neu zu beginnen und C_1 und ε_1 sind die Konstanten, die im ersten Intervall die Anpassung an die gegebenen Anfangswerte gestatten. In den späteren Intervallen müssen die Werte C_1 und ε_1 so bestimmt werden, daß ein stetiger Anschluß der Werte φ und $\dot{\varphi}$ am Anfang des Intervalls an die Endwerte des vorhergehenden erfolgt.

Die Funktion $\varphi(t)$ ist wegen des stetigen Anschlusses in den Schaltstellen in ihrem Gesamtverlauf stetig. Da sich aber aus Gl. (4) ergibt, daß $\ddot{\varphi}(t)$ Sprünge an den Schaltstellen hat, muß $\dot{\varphi}(t)$ dort Knicke haben. Daraus folgt, daß die Regelfunktion $F = \varphi + \kappa \dot{\varphi}$ ebenfalls Knicke an den Schaltstellen hat (vgl. Bild 1).

Anstatt den Ausschlag φ als Funktion der Zeit anzugeben, kann man auch die Phasenkurve $\varphi(\dot{\varphi})$ zeichnen, die einen guten Überblick über den Bewegungsverlauf gibt. Man kann nun zeigen, daß sich in einem passend gewählten schiefwinkligen $\varphi - \dot{\varphi}/\omega$ -Koordinatensystem $\left[\angle(\varphi, \dot{\varphi}/\omega) = \arccos \frac{\delta}{\omega} \right]$ die Phasenkurve aus Stücken von kongruenten logarithmischen Spiralen

zusammensetzen läßt, die abwechselnd die Konvergenzpunkte $\varphi = \pm \frac{N\beta_0}{\omega^2} = \pm \frac{b}{\omega^2}$ haben. Der Radiusvektor des i -ten Spiralenstücks hat die Gleichung

$$r_i = 2C_i \frac{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}}{\omega} e^{-\frac{\delta}{\omega} \nu t_i} \quad (\nu = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}) \quad (6).$$

Dabei ist t_i der Winkel zwischen dem Radiusvektor r_i und dem Radiusvektor am Anfang des Intervalls, der also vom Konvergenzpunkt zum Schaltpunkt $S_i = (\varphi_i, \dot{\varphi}_i/\omega)$ hinführt (vgl. Bild 2). In dieser Phasenebene $(\varphi, \dot{\varphi}/\omega)$ liegen alle Schaltpunkte $F = \varphi + \kappa \dot{\varphi} = 0$ auf einer Geraden, der „Schaltgeraden“, die die Phasenebene in zwei Halbebenen teilt. Aus den einfachen Konstruktionen in der Phasenebene kann man die Eigenschaften der geregelten Bewegung leicht ermitteln.

1. Im System *A* läuft in einem Intervall, d. h. in einem Zeitraum bestimmten Vorzeichens von F , die Spirale um den Konvergenzpunkt in der abgewandten Halbebene, im System *B* um den in derselben Halbebene (Bild 2 und 3).

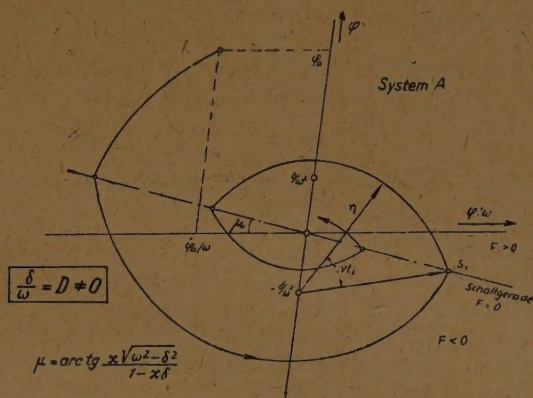


Bild 2. Phasenkurve einer Bewegung, zusammengesetzt aus Stücken von logarithmischen Spiralen; System *A*.

2. Im System *B* ist ein Verfehlen der Schaltgeraden möglich. Dann ruht die Regelung und die Schwingung läuft wie eine unregelte (freie) um eine verschobene Mittellage (Bild 4). Man hat also durch die Regelung das Abklingen der Bewegung nicht verbessert. Um sich eine Übersicht zu verschaffen, wann solches Ruhen bei den verschiedenen κ -Werten auftritt, geht man am besten folgendermaßen vor: Da man den Bewegungsverlauf übersieht, wenn man die Folge der Schalt-

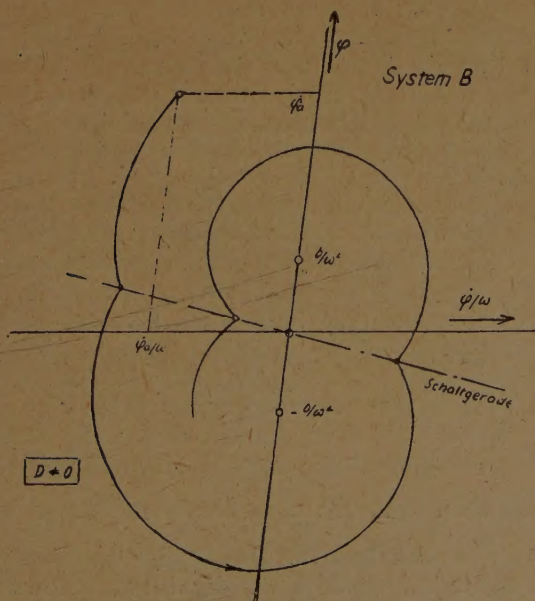


Bild 3. Phasenkurve einer Bewegung im System *B*; gleiche Anfangswerte wie in Bild 2.

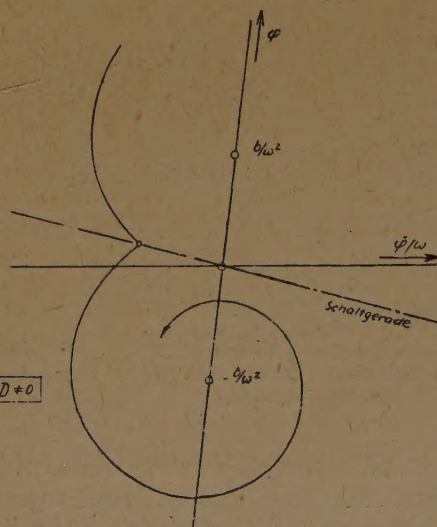


Bild 4. Phasenkurve einer Bewegung, bei der die Regelung zum Ruhen kommt.

punkte kennt, reicht es, wenn man auf jeder Schaltgeraden $\kappa = \text{konst.}$ die Schaltpunkte S_i markiert. Man kann sich demnach einen Überblick über Bewegungsabläufe bei verschiedenem κ verschaffen, wenn man in einer Ebene der Schaltwerte $\varphi_s, \dot{\varphi}_s/\omega$, die alle Schaltgeraden mit verschiedenem κ enthält, Schaltpunkte einzeichnet. In dieser Ebene der Schaltwerte kann man nun Gebiete angeben, die alle Schaltpunkte enthalten, nach denen Ruhen eintritt.

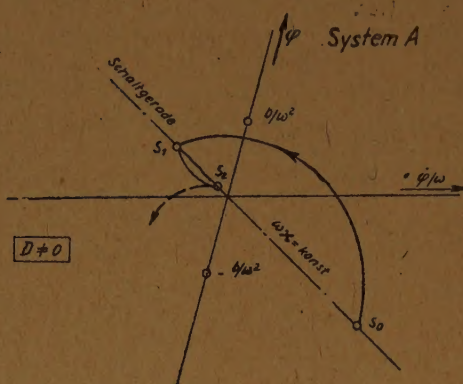
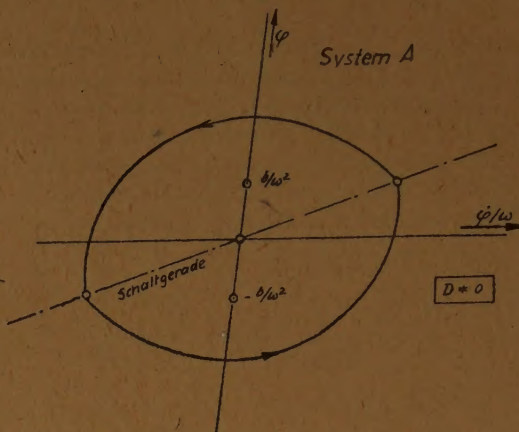
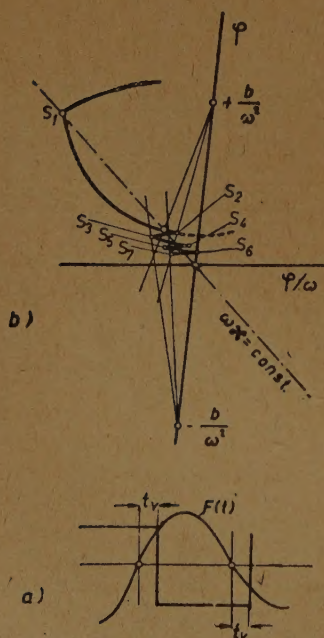
Bild 5. Endpunkt S_2 einer Bewegung.

Bild 6. Phasenkurve einer periodischen Bewegung im System A.

3. Auf der Schaltgeraden $F=0$ gibt es eine Strecke mit besonderen Punkten. Wenn die Bewegung einen solchen Phasenpunkt erreicht, wird sie undefiniert, weil F zwar Null wird, aber kein Vorzeichenwechsel stattfinden kann (Bild 5 zeigt dies für System A). Dieses hängt mit dem geknickten Verlauf der Funktion $F(t)$ an den Schaltstellen zusammen. Man kann für jeden Wert κ diese Strecke ermitteln und dann ebenfalls in einer Ebene der Schaltwerte φ_s und $\dot{\varphi}_s/\omega$ das Gebiet eingrenzen, in dem die Bewegung nicht mehr definiert ist. Solche Gebiete, Endpunktgebiete genannt, gibt es auch im System B.

Bild 7. Phasenkurve bei nachhinkender Schaltung des Stellgliedes im System A; konstante Nachhinkzeit $\tau_v = 5^\circ$.

4. Es gibt periodische Lösungen, gegen die sich die Bewegung aufschaukelnd oder abklingend bewegt, wenn sie nicht auf Endpunkte oder Ruhepunkte zuläuft¹⁾ (Bild 6).

In Wirklichkeit wird die Schaltung immer etwas nach dem Nulldurchgang der Regelfunktion F eintreten (Nachhinken des Stellgliedes), und deshalb tritt auch die Schwierigkeit der undefinierten Bewegung (Punkt 3) nicht auf. Nehmen wir an (vgl. Bild 5), die Schaltung erfolge immer um die Zeit t_v nach dem Nulldurchgang von F , dann folgt eine Bewegung hoher Frequenz (Bild 7), deren Mittelbewegung schnell auf $\varphi=0$ und $\dot{\varphi}=0$ zuläuft, und zwar, wie Golling zuerst bemerkt hat, auf

Grund der Gleichung $\varphi + \kappa \dot{\varphi} = 0$ wie $\varphi = C_1 e^{-\frac{1}{\kappa} t}$. Daraus folgt, daß man Regelungen mit kleinen positiven κ -Werten bauen muß. Und da wegen der Möglichkeit des Ruhens der Regelung System B (vgl. Punkt 2) ausscheidet, ergibt sich für die Konstruktion einer brauchbaren Regelung die engere Forderung: Positiver Regelparameter κ und System A. Weiter muß man bei einer Regelung wünschen, daß das Gebiet der Phasenebene, in dem die Schaltverschiebungen den Bewegungsverlauf wesentlich beeinflussen, groß ist in bezug auf die vorkommenden Werte $\varphi, \dot{\varphi}$, weil man auf diese Weise leicht ein gutes Abklingen der Störbewegung erhält. Die Größe und Lage dieses Gebietes hängt von den Werten $\frac{N\beta_0}{\omega^2}$ und κ ab. Für verschiedene κ -Werte übersieht

man die Verhältnisse wieder am besten in der Ebene der Schaltwerte. Das Gebiet der Schaltwerte, nach denen die zugehörige Phasenkurve im Schaltstreifen verläuft, fällt dort im wesentlichen mit dem unter 2,3 definierten Endgebiet zusammen.

¹⁾ Für die mathematische Untersuchung dieser Frage vgl. Bilharz: Über eine gesteuerte eindimensionale Bewegung. Z. angew. Math. Mech. 22 (1942), 206.

Zusammenfassend ergibt sich für den einläufigen Schwinger mit Regelung mit Stellungs-
zuordnung:

Die Lösungen streben

- a) entweder aufschaukelnd oder abklingend gegen die periodischen,
- b) oder gegen einen Endpunkt und damit bei Schaltverschiebungen gegen eine hochfrequente, bei passend gewählten $\kappa (\kappa > 0)$ im Mittel rasch auf null abklingende Bewegung,
- c) oder wegen Eintritt des Ruhens der Regelung gegen eine freie Schwingung um eine gegenüber der unregulierten verschobenen Mittellage.

3. Einläufiger Schwinger, Stellungszuordnung mit Schaltverschiebungen. Die Wirkung von Schaltverschiebungen auf den einläufigen Schwinger mit demselben Regler wie früher wurde genauer untersucht. Zur Vereinfachung ist die Dämpfung der unregulierten Schwingung gleich Null gesetzt. Das bedeutet für die Ergebnisse der Untersuchung keine wesentliche Einschränkung, weil δ im allgemeinen eine kleine Größe ist, denn sonst wäre keine Verbesserung der Dämpfung durch eine Regelung notwendig. Für die Konstruktion bedeutet $\delta = 0$, daß die Phasenkurvenstücke, die sonst im schiefwinkligen $(\varphi, \dot{\varphi}/\omega)$ -System logarithmische Spiralen sind, jetzt Kreisbogen im rechtwinkligen $\varphi - \dot{\varphi}/\omega$ -System sind, weil $\angle (\varphi, \dot{\varphi}/\omega) = \arccos \frac{\delta}{\omega} \rightarrow \pi/2$ geht.

Wir müssen zunächst den Begriff „Schaltverschiebungen“ erklären. Bislang erfolgte beim Nulldurchgang von F^* der Vorzeichenwechsel der Regelkraft, d. h. Kommando und Schaltung erfolgen gleichzeitig und zwar in dem Augenblick, in dem F^* durch Null geht. Nun können sowohl Kommando als auch Schaltung unabhängig voneinander gegen den Null durchgang von F^* verschoben sein. Folgende speziellen Fälle von Schaltverschiebungen wurden behandelt:

1. Beim Nulldurchgang von F^* wird ein Kommando gegeben, die Schaltung erfolgt, sobald $|F|$ danach einen bestimmten Wert σ_2 erreicht hat, und zwar erfolgt die

Schaltung bei $F^* = -\sigma_2$ für $\dot{F}^* < 0$,

bei $F^* = +\sigma_2$ für $\dot{F}^* > 0$.

Bild 8 zeigt die Wirkung einer solchen Nachhinkzone mit konstantem σ_2 .

2. Beim Nulldurchgang von F^* wird ein Kommando gegeben, die Schaltung erfolgt um die Zeit t_0 verzögert.

System A

System B

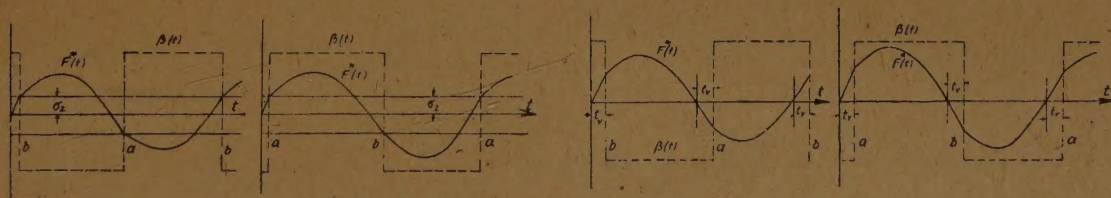


Bild 8. Verlauf der Regelfunktion F^* und des Stellglied-ausschlags β bei konstanter Nachhinkzone σ_2 . Bild 9. Verlauf der Regelfunktion F^* und des Stellglied-ausschlags β bei konstanter Nachhinkzeit t_0 .

Bild 9 zeigt die Wirkung einer konstanten Nachhinkzeit.

3. Das Stellglied β schlägt nicht von der einen Grenzlage $\pm \beta_0$ sofort in die andere Grenzlage $\pm \beta_0$ um, sondern bleibt dazwischen solange in der Nullage stehen, als $|F^*| \leq \sigma_1$ ist (tote Zone). Kommando und Schaltung erfolgen gleichzeitig, sind aber gegen den Nulldurchgang von F^* verschoben.

System A

System B

$$\begin{aligned} F^* > \sigma_1; \quad \beta &= -\beta_0 \\ \sigma_1 \geq F^* \geq -\sigma_1; \quad \beta &= 0 \\ F^* < -\sigma_1; \quad \beta &= +\beta_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^* > \sigma_1; \quad \beta &= +\beta_0 \\ \sigma_1 \geq F^* \geq -\sigma_1; \quad \beta &= 0 \\ F^* < -\sigma_1; \quad \beta &= -\beta_0 \end{aligned}$$

Bild 10 zeigt eine tote Zone konstanter Breite σ_1 .

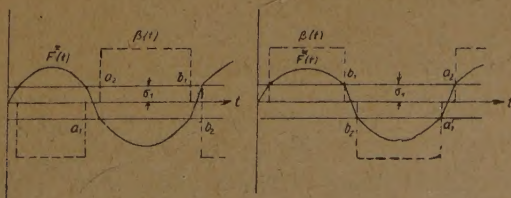


Bild 10. Verlauf der Regelfunktion F^* und des Stellglied-ausschlags β bei toter Zone σ_1 .

Die beschriebenen Typen von Schaltverschiebungen kommen natürlich nicht nur getrennt vor, sondern können sich auch überlagern; sie kommen auch nicht immer in dieser „idealisierten“ Form vor, aber die Klassifizierung erleichtert das Studium der Erscheinungen und gestattet auch, Schlüsse zu ziehen über das Verhalten z. B. bei vorhandener, aber nicht konstanter Nachhinkzeit usw.

Beim Studium des Einflusses der Schaltverschiebungen müssen wir die allgemeine Regel-funktion $F^* = \kappa_1 \varphi + \kappa_2 \dot{\varphi}$ benützen, weil die Schaltung nicht mehr beim Nulldurchgang von F^* erfolgt. Zur vollständigen Untersuchung müssen wir demnach zwei Parameter κ_1 und κ_2 variieren. Dabei können wir wieder κ_1 als positiv annehmen, denn durch das doppelte Vorzeichen vor $\text{sgn } F^*$ werden alle Möglichkeiten erfaßt. Da für den Fall, daß die Eigendämpfung Null ist, die Lösung φ abschnittsweise durch

$$\varphi = 2C_1 \cos(\omega t + \varepsilon) \pm \frac{b}{\omega^2} \quad \text{mit } b = N\beta_0 \quad \dots \dots \dots (7)$$

gegeben ist, hat die Steuerfunktion F^* die Form

$$F^* = 2C_1 \sqrt{\kappa_1^2 + \omega^2 \kappa_2^2} \cos(\omega t + \varepsilon + \mu) \pm \frac{b}{\omega^2} \kappa_1 \quad \dots \dots \dots (8)$$

mit

$$\text{tg } \mu = \frac{\omega \kappa_2}{\kappa_1} \quad \dots \dots \dots (9)$$

Es hat sich im Laufe der Untersuchung als praktisch erwiesen, nicht κ_1 und κ_2 zu variieren, sondern μ und $\bar{C} = \sqrt{\kappa_1^2 + \omega^2 \kappa_2^2}$. Das hat neben später offen liegenden Vorteilen den Vorzug, daß man bei festgehaltenem \bar{C} sehr leicht den Anschluß an die früheren Untersuchungen findet.

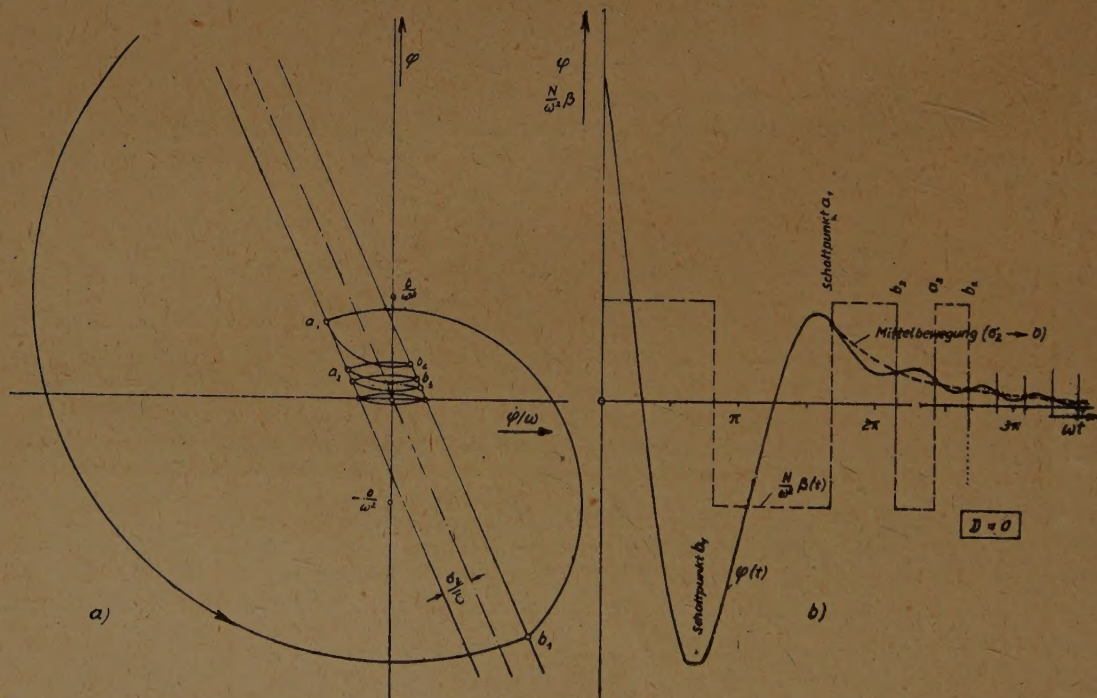


Bild 11a. Phasenkurve

einer Bewegung bei Regelung mit konstanter Nachhinkzone im System A.

Bild 11b. Ausschlag-Zeit-Diagramm

Für eine konstante Nachhinkzone σ_2 ist in Bild 11a der Bewegungsverlauf für System A gezeigt. Da der Abstand von der Kommandogeraden $F^* = 0 = \kappa_1 \varphi + \kappa_2 \dot{\varphi}$ dem Wert der Funktion F^* proportional ist, ergibt sich, daß bei konstanter Nachhinkzone das Schalten auf Geraden erfolgt, die parallel zur Kommandogeraden sind. Wie bei der Regelung ohne Schaltverschiebung können wir auch hier leicht zeichnerisch die Bewegungsverläufe ermitteln:

1. Im System A verläuft für positive μ die Bewegung abklingend. Sie wird nach einer Anzahl von Intervallen, die von der Größe der Anfangsstörungen abhängt, in eine Bewegung, die nur zwischen den Schaltgeraden verläuft, übergehen und schließlich (abgesehen von $\mu = 90^\circ$) gegen eine periodische Bewegung um $\varphi_m = \varphi_s = 0$ streben. Die Schaltpunkte dieser periodischen Bewegung

sind die Schnittpunkte der Schaltgeraden mit der $\dot{\varphi}/\omega$ -Achse (vgl. Bild 11a). Die Schwingungsdauer T dieser Bewegung ist durch

$$\operatorname{tg} \frac{\omega T}{4} = \frac{1}{b/\omega^2} \frac{\sigma_2}{C} \frac{1}{\sin \mu} \dots \dots \dots (10)$$

gegeben. In Bild 11b ist das zugehörige Ausschlagzeitdiagramm gezeichnet. Das Gebiet der Schaltwerte, nach denen die Phasenkurve für einen einzelnen μ -Wert nur im Schaltstreifen verläuft, deckt sich im wesentlichen mit dem Endpunktgebiet der Bewegung mit Regelung ohne Schaltverschiebungen. Bei kleiner werdendem σ_2 erhält man die in Abb. 11b eingezeichnete Mittelbewegung, die auf Null zuläuft. Die Bewegung bei endlichen σ_2 spielt um diese Mittelbewegung.

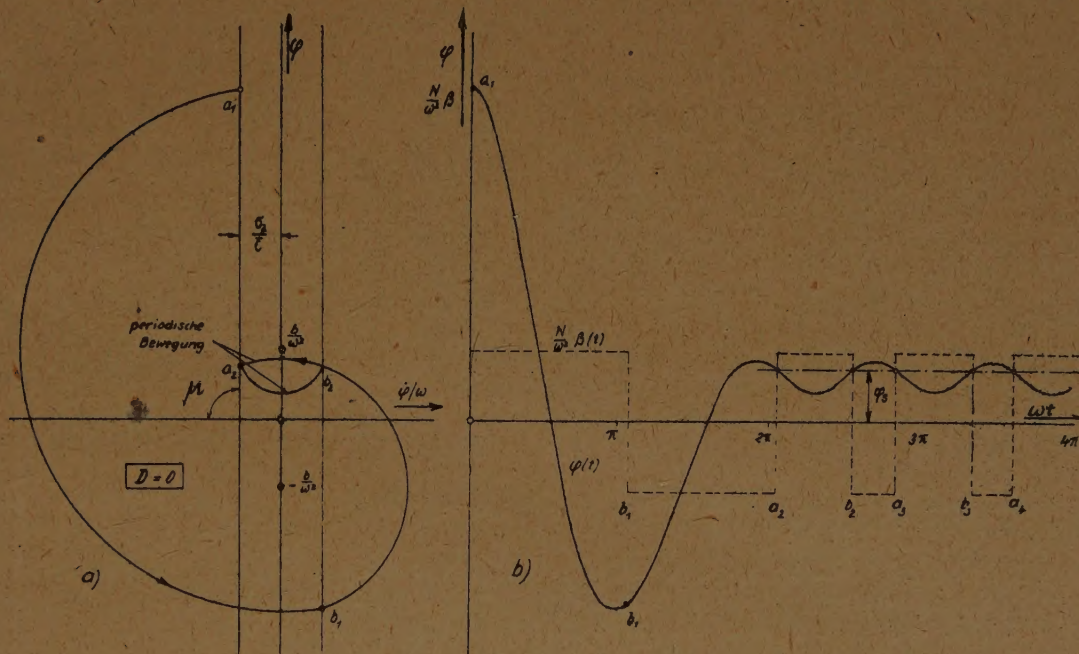


Bild 12a. Phasenkurve einer Bewegung mit konstanter Nachhinkzone im System A bei $\mu = 90^\circ$. (Die Regelfunktion ist der Geschwindigkeit proportional.)

Bild 12b. Ausschlag-Zeit-Diagramm

Bei $\mu = 90^\circ$, wenn die Steuerungsfunktion F der Funktion $\dot{\varphi}$ proportional ist, läuft die Bewegung ebenfalls auf eine periodische zu (vgl. Bild 12a und 12b). Diese periodische Bewegung setzt sich aber aus zwei ungleich langen Intervallen zusammen. Die Schaltwerte φ_s sind von Null verschieden.

2. Für negative μ verläuft im System A die Bewegung angefacht (Bild 13).

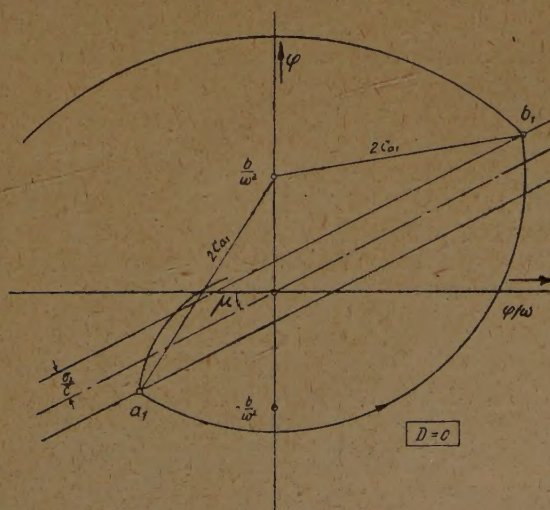


Bild 13. Phasenkurve einer angefachten Bewegung bei Regelung mit konstanter Nachhinkzone im System A.

3. Im System B verläuft die Bewegung für negative μ gedämpft, bis Ruhen der Regelung eintritt (Bild 14). Von da an setzt eine periodische Bewegung um einen im allgemeinen von Null verschiedenen Mittelwert ein. Wenn der ungesteuerte Schwinger eine Eigendämpfung hat (Systemgleichung $\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$), tritt im Ruhegebiet eine gedämpfte freie Schwingung um eine

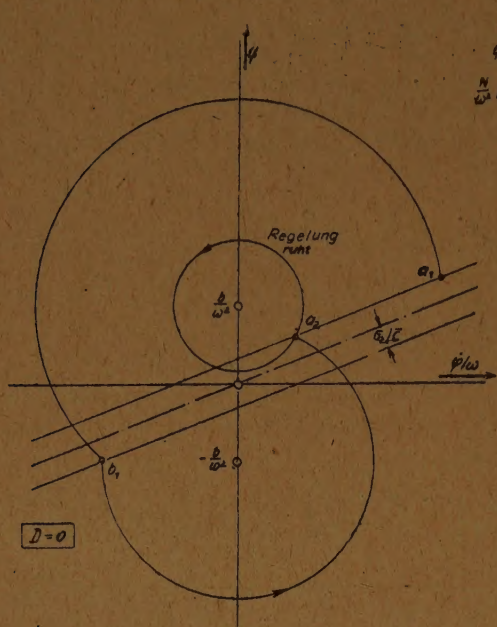


Bild 14. Phasenkurve bei konstanter Nachhinkzone im System B , bei der die Regelung zum Ruhen kommt.

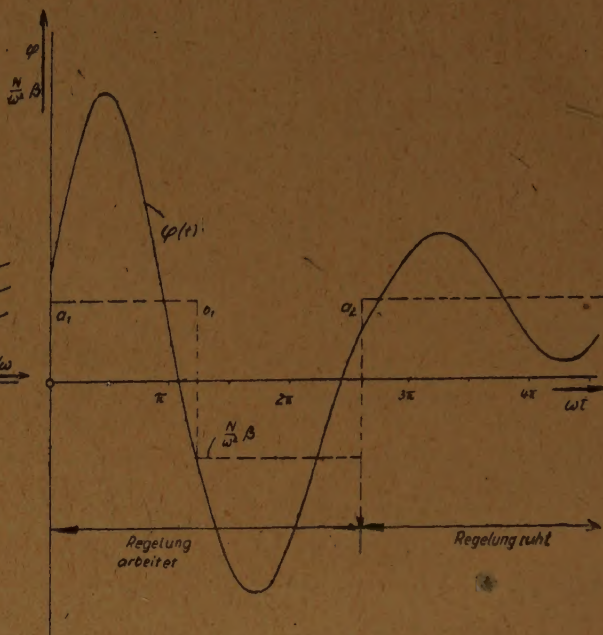


Bild 15. Ausschlag-Zeit-Diagramm zur Phasenkurve Bild 14.

von Null verschiedene Mittellage auf. Die Gebiete, in denen Ruhen auftritt, können in einer Ebene der Schaltwerte $(\varphi_s, \dot{\varphi}_s/\omega)$ für variierendes μ angegeben werden. Bild 15 zeigt eine Bewegung, bei der Ruhen der Regelung auftritt, im Ausschlagzeitdiagramm.

4. Für positives μ verläuft im System B die Bewegung angefacht.

Damit sind die Bewegungsverläufe bei konstanter Nachhinkzone untersucht, wenn wir μ oder κ_2/κ_1 variieren. Eine Variation von $\bar{C} = \sqrt{\kappa_1^2 + \omega^2 \kappa_2^2}$ bedeutet, daß sich der Abstand der Schaltgeraden $\frac{2\sigma_2}{C}$ ändert.

Tritt eine konstante Nachhinkzeit auf, so spaltet sich, wie bei der Nachhinkzone, die Schaltgerade in zwei Schaltgeraden g_1 und g_2 auf, die wieder symmetrisch zum Nullpunkt des Koordinatensystems liegen, nun aber im Gegensatz zu früher gegen die Kommandogerade um den Winkel ωt_v geneigt sind (vgl. Bild 16). Dabei ergibt sich noch die merkwürdige Eigenschaft, daß bei veränderlichem μ , aber festen t_v die Schaltgeraden g_1 alle durch einen festen Punkt S_{01} und die Geraden g_2 alle durch einen festen Punkt S_{02} gehen. Die Koordinaten dieser Punkte S_{01} und S_{02} hängen nur von ωt_v und $\frac{b}{\omega^2}$ ab.

In Bild 16 ist eine Phasenkurve für Regelsystem A und $\mu - \omega t_v > 0$ gezeichnet. Man sieht, daß nach einigen Schaltungen die Phasenkurve nur noch innerhalb des Schaltstreifens verläuft; ein dauerndes Weiterkonstruieren würde zeigen, daß sich bei dieser Regelung (System A ; $\mu - \omega t_v > 0$) die Bewegung einer periodischen nähert, deren Schaltpunkte die Schnittpunkte der Schaltgeraden mit der $\dot{\varphi}/\omega$ -Achse sind. Die Restschwingung hängt wesentlich von ωt_v ab. Die Schaltpunkte haben die Koordinaten

$$\frac{\varphi_s}{\omega} = \pm \frac{b}{\omega^2} \left| \frac{\cos(\mu - \omega t_v) - \cos \mu}{\sin(\mu - \omega t_v)} \right| \dots \dots \dots (11)$$

Die Schwingungsdauer T_p ist durch

$$\text{tg} \frac{\omega T_p}{4} = \left| \frac{\cos(\mu - \omega t_v) - \cos \mu}{\sin(\mu - \omega t_v)} \right| \dots \dots \dots (12)$$

gegeben²⁾.

²⁾ Für $\mu \rightarrow 90^\circ$ ergibt sich daraus $T_p = 4 t_v$, was zur experimentellen Bestimmung der Nachhinkzeit benutzt werden kann.

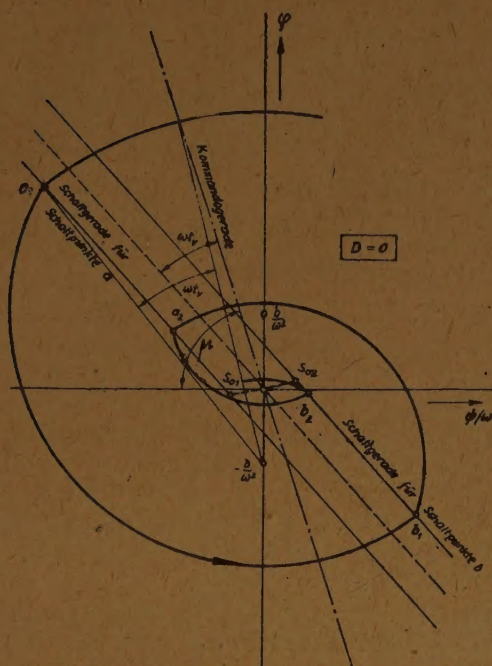


Bild 16. Phasenkurve einer Bewegung bei Regelung mit konstanter Nachhinkzeit im System A; $\mu - \omega t_v > 0$.

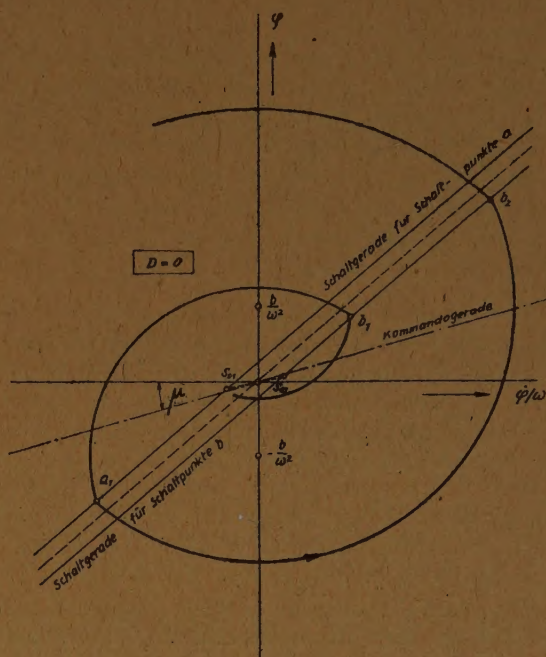


Bild 17. Phasenkurve einer Bewegung wie in Bild 16, aber $\mu - \omega t_v < 0$.

In Bild 17 ist eine geregelte Bewegung im System A für negativen μ -Wert gezeichnet, sie schaukelt sich auf, ganz entsprechend den Verhältnissen bei verschwindender Nachhinkzeit. Man kann sich leicht auch Beispiele für Bewegungen im System B bei verschiedenen μ -Werten konstruieren. Da aber im System B wieder Ruhegebiete auftreten und die Bewegung je nach den Werten $(\mu - \omega t_v)$ entweder abklingend gegen die Ruhegebiete geht oder angefacht verläuft, ist das System B ungünstig. Für das bevorzugte System A kann man in der Ebene der Schaltwerte Grenzgebiete angeben, von deren Punkten aus die Bewegung in der Phasenebene immer nur im Schaltstreifen verläuft. Die Gebiete decken sich im wesentlichen³⁾ mit den Gebieten, in denen bei der idealen Regelung ohne Schaltverschiebung die Bewegung undefiniert ist. Bei der Wahl des Regelparameters $\kappa = \arctg \mu$, der wegen einer gut abklingenden Mittelbewegung klein sein soll, muß man darauf achten, daß wegen der Neigung der Schaltgeraden gegen die Kommandogerade der Winkel $(\mu - \omega t_v)$ positiv bleiben muß, um im System A Abklingen zu erhalten.

Die am Anfang dieses Abschnitts erwähnte Regelung mit einer toten Zone hat nicht die erfreulichen Eigenschaften der Regelung mit konstanter Nachhinkzeit. Die Gebiete undefinierter Bewegung verschwinden durch diese Art von Schaltverschiebung nicht. Bild 18 zeigt eine Phasenkurve für System A und positiven μ -Wert. Sie setzt sich aus Kreisen um

die Punkte $\varphi = \pm \frac{b}{\omega^2}$ und $\varphi = 0$ zusammen. Man kommt

im System A bei $\mu > 0$ leicht zu Endpunkten. Das Grenzgebiet in der Ebene der Schaltwerte, das die Endpunkte der Bewegung enthält, ist einfach zu bestimmen; während sich bei der Bewegung ohne tote Zone Kreise (Eigendämpfung $\delta = 0$; wäre sie nicht 0, dann träten Ellipsen auf) ergeben, treten hier erweiterte Kardiodien auf, allerdings nur für die Punkte a_2 und b_2 . Die gefährlichen Lagen der Punkte a_1 und b_1 sind etwas schwieriger zu beschreiben. Da die Konstruktion

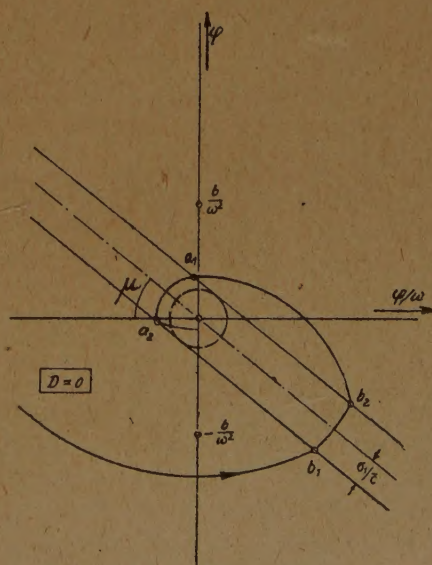


Bild 18. Phasenkurve einer Bewegung mit toter Zone im System A; $\mu > 0$.

³⁾ Geringe Unterschiede, weil Kommandogerade und Schaltgerade nicht wie dort zusammenfallen.

dieser geregelten Bewegung aber besonders einfach ist, kann man auch ohne jede Rechnung sich einen vollen Überblick über den Ablauf verschaffen. Jedenfalls ist bei Eigendämpfung $\delta=0$ eine tote Zone unbedingt zu vermeiden, da sie nur Wirkungsminderungen gegenüber der idealen Regelung bringen kann und gar keine Vorteile, wie die Nachhinkzeit, mit sich bringt. Ist dies nicht möglich, so muß man dafür Sorge tragen, daß durch ein Nachhinken der Schaltung die Bewegung immer definiert bleibt und sie möglichst gegen eine periodische Bewegung nahe am Nullpunkt der Phasenebene geht.

Wenn man den Einfluß von Schaltverschiebungen auf die geregelte Bewegung von Schwingern mit Eigendämpfung δ untersucht, ergeben sich geringe Modifikationen der Resultate für $\delta=0$, die leicht zu ermitteln sind.

4. Einläufiger Schwinger, Laufgeschwindigkeitszuordnung ohne und mit Rückführung. Die bisher behandelte Regelung arbeitet mit Stellungszuordnung, d. h. der Ausschlag des Stellgliedes hängt vom Ausschlag φ und der Geschwindigkeit $\dot{\varphi}$ ab. Vielfach werden nun auch Regelungen gebaut, bei denen die Geschwindigkeit β des Stellgliedes von den Werten φ und $\dot{\varphi}$ abhängt. Solche Regelungen bezeichnet man als Regelungen mit Laufgeschwindigkeitszuordnung. Wenn die Geschwindigkeit des Stellgliedes nur zwei feste entgegengesetzt gleiche Werte $\pm V$ annehmen kann, sprechen wir von einer Schwarz-Weiß-Regelung mit Laufgeschwindigkeitszuordnung. Sie unterscheidet sich von der Schwarz-Weiß-Regelung mit Stellungszuordnung wesentlich dadurch, daß das Stellglied nicht nur zwei Grenzlagen einnehmen kann, sondern seine Lage stetig ändert.

Für einen einläufigen Schwinger wurde die geregelte Bewegung bei Laufgeschwindigkeitszuordnung mit und ohne Rückführung untersucht. Wenn keine Rückführung vorhanden ist, lauten die System- und Regelgleichung

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = N\beta \quad (13),$$

$$\dot{\beta} = \pm V \operatorname{sgn} F^* \quad \text{mit} \quad F^* = \kappa_1 \varphi + \kappa_2 \dot{\varphi} \quad (14).$$

Die beiden Vorzeichen unterscheiden zwei Regelsysteme, die in Analogie zur Festsetzung in Abschnitt 2 als *A* und *B* bezeichnet sind:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\beta} &= -V \operatorname{sgn} F^* & \text{System A} \\ \dot{\beta} &= +V \operatorname{sgn} F^* & \text{System B} \end{aligned} \right\} \quad (15).$$

Man kann hier aber nicht den Grenzfällen $\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \kappa \rightarrow 0$ und $\kappa \rightarrow \infty$ eine einfache mechanische Deutung geben. In Bild 19 ist für System A und positives κ ein angefachter Bewegungsverlauf gezeichnet. Eine Regelung mit Stellungszuordnung hätte in diesem Fall ($A, \kappa > 0$) zu einer gedämpften Bewegung geführt. Ersetzt man den in Bild 19 angegebenen β -Verlauf durch einen stückweise konstanten im Sinne einer Stellungszuordnung (punktiert eingetragen), so erkennt man, daß $\kappa < 0$ sein muß, wenn $= \varphi + \kappa \dot{\varphi}$ an den neuen Schaltstellen verschwinden soll. Dem entspricht aber bei Stellungszuordnung F eine angefachte Bewegung. Allerdings bestehen nicht immer so einfache Analogien zwischen Regelungen mit Laufgeschwindigkeitszuordnung ohne Rückführung und Stellungszuordnung. Eine wesentliche Rolle spielt nämlich der Anfangswert des Stellgliedärausschlags β . Dieser ist in dem Bild 19 zugrunde liegenden Beispiel Null. Ist er wesentlich von Null verschieden, wie etwa in Bild 21b, dann kann es vorkommen, daß der Ausschlag des Stellgliedes während des

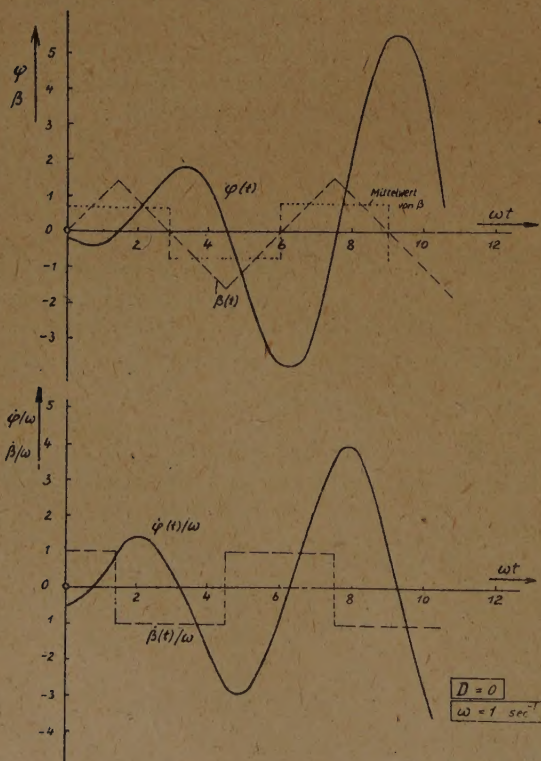


Bild 19. Zeitlicher Verlauf von φ , $\dot{\varphi}$, β für eine Bewegung mit Laufgeschwindigkeitsregelung ohne Rückführung im System A; Regelparameter $\omega \kappa = 0,1$, Eigendämpfung $D = 0$.

ganzen Bewegungsablaufs dasselbe Vorzeichen hat, und daß ein Analogon bei der Bewegung mit Regelung mit Stellungszuordnung fehlt. Die nächste Beziehung bestände noch zu einer Bewegung mit ruhender Regelung bei Stellungszuordnung. Die Ersetzung einer Stellungszuordnung durch eine Laufgeschwindigkeitszuordnung führt also nicht etwa nur dazu, die Bewegungsvorgänge „weicher“ zu machen, sondern kann auch ganz andere Bewegungstypen ergeben.

Die analytische Lösung für die Teilintervalle ist leicht anzuschreiben, wenn man beachtet, daß die einmal differenzierte Gl. (13)

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = N\beta = \pm NV \operatorname{sgn} F^* \quad (16)$$

eine während eines Regelintervalls konstante rechte Seite hat:

$$\varphi(t) = 2Ce^{-\delta t} \cos(\nu t + \varepsilon) + \frac{N\beta_0}{\omega^2} \mp (\operatorname{sgn} F^*) \frac{VN}{\omega^3} \left\{ 2\frac{\delta}{\omega} - \frac{\nu t}{\sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega}\right)^2}} \right\} \quad (17)$$

mit $\nu = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$

und $\frac{\dot{\varphi}(t)}{\omega} = 2Ce^{-\delta t} \cos(\nu t + \varepsilon + \sigma) \pm (\operatorname{sgn} F^*) \frac{VN}{\omega^3} \quad (18)$

mit $\cos \sigma = -\frac{\delta}{\omega} \quad (19)$

und $\beta(t) = \beta_0 \pm (\operatorname{sgn} F^*) \frac{N}{\omega \sqrt{1 - (\delta/\omega)^2}} \quad (20)$

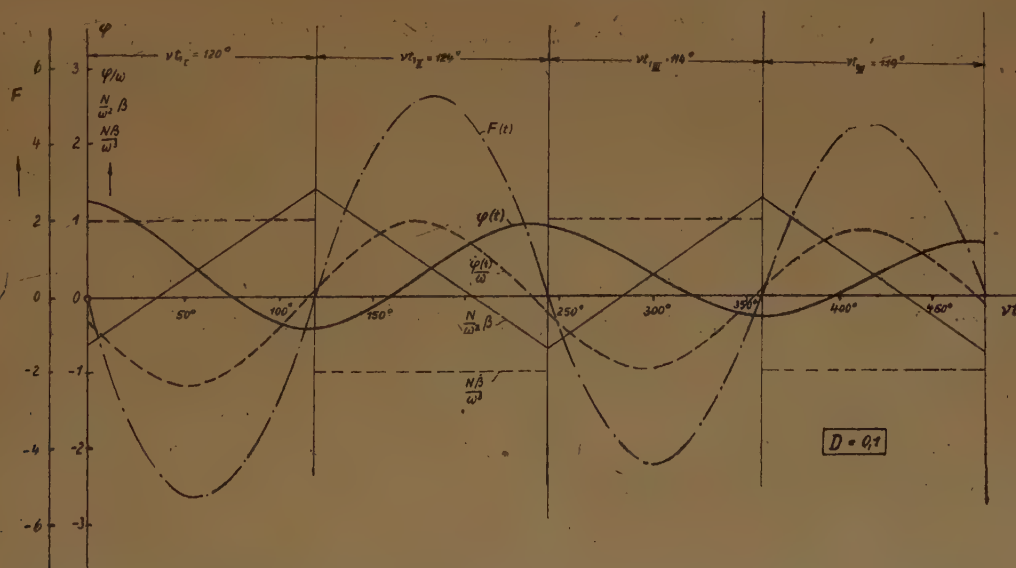


Bild 20. Ausschlag-Zeit-Diagramm einer Bewegung mit Laufgeschwindigkeitsregelung ohne Rückführung im System A; $\omega \kappa = 5$, $D = 0,1$. Da der zugehörige periodische Schaltpunkt im Koordinatenursprung liegt, klingt die Bewegung nach 0 ab.

C , ε und β_0 sind durch die Werte von φ , $\dot{\varphi}$ und β am Intervallanfang bestimmt. In Bild 20 ist der Verlauf einer Bewegung im System A bei positivem μ -Wert durch die Diagramme $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$, $F(t)$, $\beta(t)$ und $\dot{\beta}(t)$ dargestellt. Aus der Diskussion der Gl. (16) ergibt sich, daß $\ddot{\varphi}(t)$ Sprünge hat, also $\dot{\varphi}(t)$ Knicke. Deshalb hat im Gegensatz zur Regelung mit Stellungszuordnung die Regelfunktion eine stetige Ableitung $\dot{F}^* = \kappa_1 \dot{\varphi} + \kappa_2 \ddot{\varphi}$. Daraus folgt, daß bei der Regelung mit Laufgeschwindigkeitszuordnung keine Schaltpunkte auftreten, in denen die Bewegung undefiniert wird.

Die Phasenkurve der Bewegung ist durch die drei Koordinaten $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$ und $\beta(t)$ bestimmt, ist also eine Raumkurve. Sie setzt sich aus Stücken „auseinandergezogener Spiralen“ zusammen. Eine so einfache Konstruktion wie im Fall der Stellungszuordnung ist nicht mehr möglich. Für einen Überblick über den Verlauf der Bewegungen reicht es, wenn man die Folge der Schaltpunkte

3. Quadranten. Da S_0 den Wert $\varphi_s = 3,5$ hat, finden wir den Punkt S_1 durch Interpolation zwischen den auf der interpolierten Endisochrone leicht zu findenden Punkten $\varphi_s = 2$ und $\varphi_s = 4$. Nun müssen wir feststellen, auf welcher Anfangsisochrone vom Typ b der Punkt S_1 liegt. Durch Interpolation zwischen den Anfangsisochronen b mit $\nu t_{1\text{anf}} = 120^\circ$ und 140° finden wir $\nu t_{1\text{anf}} = 131^\circ$ und suchen nun den Punkt S_2 . Er muß auf der Endisochrone vom Typ a mit der Ziffer 131° liegen usw. In Bild 21b ist das zu der eben untersuchten Bewegung gehörende Ausschlagzeitdiagramm gezeichnet.

Im System A ist die Abklinggeschwindigkeit meistens gering. Liegt jedoch ein periodischer Punkt in der Schaltebene, so strebt die Bewegung diesem zu. Dabei kann trotz eines kleinen Schaltwertes φ_s der Maximalausschlag von φ noch groß sein. Im System B endet die Bewegung nach wenigen Schaltungen bei Ruhepunkten.

Nach diesen Ergebnissen empfiehlt sich eine Regelung mit Laufgeschwindigkeitszuordnung ohne Rückführung nicht. Ganz anders liegen dagegen die Verhältnisse bei einer Regelung mit Laufgeschwindigkeitszuordnung mit Rückführung. Die Regelfunktion F^* lautet in diesem Fall

$$F^* = \kappa_1 \varphi + \kappa_2 \dot{\varphi} + \kappa_3 \frac{N}{\omega^2} \beta \dots \dots \dots (21).$$

Die Lösungen lassen sich für die einzelnen Intervalle in genau derselben Form wie bei der Steuerung ohne Rückführung Gl. (17, 18, 20) anschreiben. Natürlich ist auch bei gleichen Anfangswerten wie früher (Bild 20) der Verlauf der Bewegung anders, weil die Länge der Intervalle durch die neue Steuerfunktion Gl. (21) bestimmt ist (Bild 22).

Da die Geschwindigkeit $\dot{\beta}$ des Stellgliedes an den Schaltstellen unstetig ist, hat der Ausschlag $\beta(t)$ Knicke an diesen Stellen. Deshalb hat auch die Regelfunktion $F^*(t) = \kappa_1 \varphi + \kappa_2 \dot{\varphi} + \kappa_3 \beta \frac{N}{\omega^2}$ wieder Knicke an den Schaltstellen wie bei der Regelung mit Stellungszuordnung. Da, wie wir früher schon bemerkten, Knicke der Regelfunktion F^* an den Schaltstellen die Ursache für das Auftreten von Schaltpunkten ist, in denen die Bewegung undefiniert wird, werden im Raum der Schaltwerte $\varphi_s, \dot{\varphi}_s/\omega, \beta$ nun wieder Gebiete auftreten, die solche Punkte enthalten (Randpunktgebiete, kurz Grenzgebiete genannt).

Bei beliebig vorgegebenen Anfangswerten kann man die Bewegung am einfachsten wieder wie früher durch die Folge der Schaltpunkte in der Schaltebene mit eingezeichneten Anfangs- und Endisochronen verfolgen. Die Mannigfaltigkeit der Schaltebenen ist größer als bei der Regelung ohne Rückführung, weil zwei Parameter κ_2/κ_1 und κ_3/κ_1 die Lage der Ebene bestimmen. Die Schaltebene enthält den Nullpunkt des Phasenraumes, liegt aber im Gegensatz zu früher schräg gegen das Achsenkreuz, so daß sie keine der Achsen enthält. Bild 23 zeigt eine Projektion einer Schaltebene mit Anfangs- und Endisochronen in die φ_s, β_s -Ebene. In der Projektion der Schaltebene wird auch das Gebiet der Schaltpunkte sichtbar, in denen die Bewegung, wenn keine Schaltverschiebungen vorhanden sind, undefiniert wird (Parallelstreifen, in dem nur Endisochronen vorhanden sind). Da in Wirklichkeit aber Schaltverschiebungen immer vorhanden sind, wird man wieder eine hochfrequente Bewegung erhalten, deren Mittelbewegung leicht bestimmt werden kann. Für sie gelten die Gleichungen

$$\ddot{\bar{\varphi}} + 2\delta\dot{\bar{\varphi}} + \omega^2\bar{\varphi} = N\bar{\beta} \dots \dots \dots (22)$$

$$F^* = \kappa_1\bar{\varphi} + \omega\kappa_2\dot{\bar{\varphi}} + \frac{\kappa_3 N}{\omega^2}\bar{\beta} = 0 \dots \dots \dots (23).$$

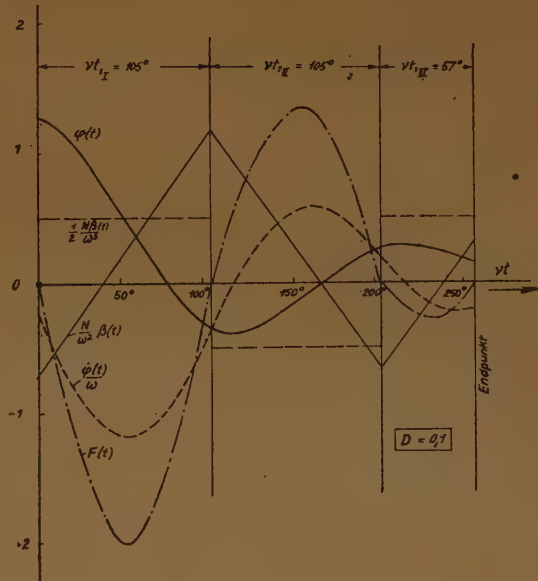


Bild 22. Ausschlag-Zeit-Diagramm einer Bewegung bei Laufgeschwindigkeitsregelung mit Rückführung im System A . Die Bewegung führt auf einen Endpunkt; $\omega\kappa_3 = 2,3$; $\kappa_2 = 1$.

Sobald es in seiner Bahn gestört wird, führt es eine gedämpfte freie Schwingung aus. Die während dieser Schwingung auftretenden Abweichungen des Anstellwinkels, des Längsneigungswinkels und der Geschwindigkeit von den stationären Werten sollen mit α , ϑ und v bezeichnet werden. Um die im allgemeinen geringe Dämpfung der Bahnschwingung zu vergrößern, sei eine Regelung eingebaut. Die Lagenabweichung ϑ und die Drehgeschwindigkeit $\dot{\vartheta}$ werden durch Kreisel gefühlt, und dadurch das Höhenruder so gesteuert, daß die entsprechende Auftriebs- oder Momentenänderung die Bewegung beeinflusst, d. h. möglichst zusätzlich dämpft.

Wenn wir z. B. das Höhenruder regeln und annehmen, daß das Gleichgewicht in Auftriebs- und Bahnrichtung dadurch nicht beeinflusst wird, lauten die System- und Regelmäßigungen:

$$I \quad a_{10} \alpha + b_{10} \vartheta + \left(c_{10} + c_{11} \frac{d}{d\tau} \right) \frac{v}{v_0} = 0$$

$$II \quad \left(a_{20} + a_{21} \frac{d}{d\tau} \right) \alpha + \left(b_{20} + b_{21} \frac{d}{d\tau} \right) \vartheta + c_{20} \frac{v}{v_0} = 0 \quad \dots \dots \dots (26)$$

$$III \quad \left(a_{30} + a_{31} \frac{d}{d\tau} \right) \alpha + \left(b_{31} \frac{d}{d\tau} + b_{32} \frac{d^2}{d\tau^2} \right) \vartheta = \eta_H \cdot N$$

$$\eta_H = \pm \eta_H \cdot \operatorname{sgn} (\vartheta + \kappa \dot{\vartheta}) \quad \dots \dots \dots (27).$$

τ bezeichnet die dimensionslos gemachte Zeit t .

Da η_H während eines Intervalles konstant ist und die Systemgleichungen lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten sind, haben zwischen zwei Schaltungen die Lösungen die Form:

$$\vartheta = \sum \mathfrak{B}_k e^{\lambda_k \tau} + \mathfrak{B}; \quad \alpha = \sum A_k \mathfrak{B}_k e^{\lambda_k \tau} + \mathfrak{A}; \quad v/v_0 = \sum C_k \mathfrak{B}_k e^{\lambda_k \tau} + \mathfrak{C} \quad \dots \dots \dots (28).$$

Dabei bezeichnen die Konstanten \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} die durch die Regelung hervorgerufenen Mittellagenverschiebungen, die \mathfrak{B}_k werden durch die Anfangsbedingungen bestimmt, die C_k und A_k sind durch die Konstanten der Systemgleichungen bestimmte Proportionalitätszahlen, die λ_k sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung des Systems. Sie hat im allgemeinen zwei Paare konjugiert komplexer Wurzeln. Demnach können wir vier Anfangswerte $\gamma_a = \vartheta_a - \alpha_a$, ϑ_a , $\vartheta'_a = \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \right)_a$ und v_a erfüllen⁵⁾. Genau wie früher wird sich zeigen, daß der Verlauf der geregelten Bewegung wesentlich vom gewählten Regelsystem und von den Anfangsstörungen abhängt. Die Darstellung macht allerdings einige Mühe, weil man wegen der vier Anfangswerte eigentlich im vierdimensionalen Raum arbeiten müßte. Wenn man sich aber auf die Darstellung der Schaltwerte für festes κ beschränkt, kann man in einem dreidimensionalen Raum arbeiten, weil ϑ und ϑ' dann fest miteinander durch die Beziehung

$$\vartheta_s + \kappa \vartheta'_s = 0 \quad \dots \dots \dots (29)$$

verbunden sind. Als Koordinaten dieses Schaltraums⁶⁾ sind γ , v und $\xi = \sqrt{\vartheta_s^2 + \vartheta_s'^2}$ gewählt.

Nach den Ergebnissen der Abschnitte 2 und 3 wird man versuchen, die Regelung möglichst so zu bauen, daß man nach wenigen Regeltakten auf Schaltpunkte im Grenzgebiet stößt, nach denen die Störung in schnellen Schwingungen rasch abklingt. Deshalb hat es einen Sinn, sofort die Frage nach diesem Gebiet anzuschneiden.

⁵⁾ Die Systemgleichungen schreiben sich am bequemsten in α , ϑ und v . Die Störungen sind aber meist in γ , ϑ , ϑ' und v gegeben, wobei $\gamma = \vartheta - \alpha$ den Bahnwinkel bezeichnet.

⁶⁾ Zur Gedächtnisstütze seien die Bezeichnungen noch einmal zusammengestellt:

1. Einläufiger Schwinger mit Stellungszuordnung
Ebene der Schaltwerte: Koordinaten ϑ_s und ϑ'_s . Schaltstrahl oder Schaltgerade: $\vartheta_s = -\kappa \vartheta'_s$.
2. Einläufiger Schwinger mit Laufgeschwindigkeitszuordnung
Raum der Schaltwerte: Koordinaten ϑ_s , ϑ'_s und β . Schaltebene: Koordinaten $\vartheta_s = -\kappa \vartheta'_s$ und β .
3. Dreiläufiger Schwinger mit Stellungszuordnung
Raum der Schaltwerte: Koordinaten ϑ_s , γ_s , ϑ_s , ϑ'_s (4 Dimensionen).
Schaltraum: Koordinaten ϑ_s , γ_s , $\vartheta_s = -\kappa \vartheta'_s$ (3 Dimensionen).

Grenzgebiete (oder Endpunktgebiete bei fehlenden Schaltverschiebungen) sind in der Ebene bzw. den Räumen der Schaltwerte eingezeichnet, sie werden in den Gebilden geringerer Ordnung (Schaltstrahl, Schaltebene und Schaltraum) im Schnitt sichtbar.

Bei Laufgeschwindigkeitszuordnung kann man für den dreiläufigen Schwinger ebenfalls die Bestimmung der Grenzgebiete bei Regelung mit Rückführung durchführen. In diesen wird dann wieder eine Mittelbewegung auftreten, die einer stetigen Steuerung entspricht.

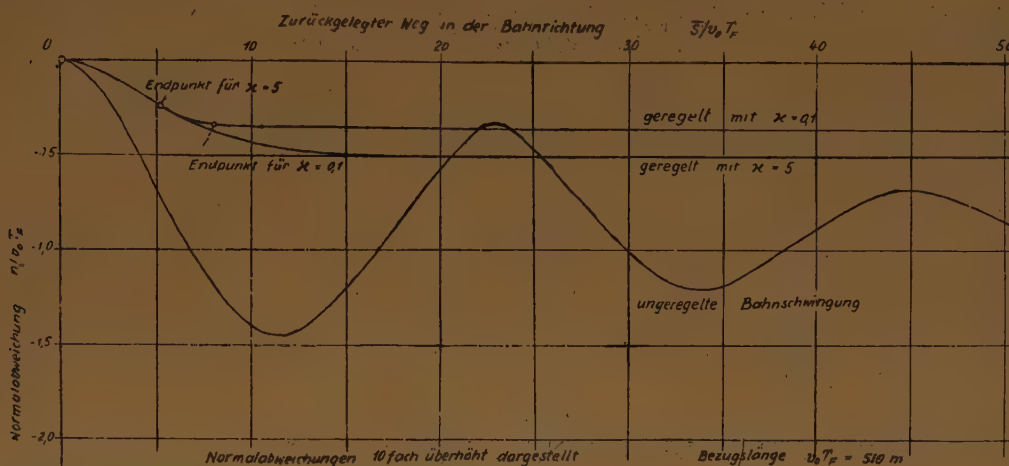


Bild 26. Abweichungen von der stationären Flugbahn beim Beispiel des Schwingers von Bild 25. Vergleich mit den Bahnabweichungen bei Regelung mit $\kappa = 0,1$ und bei unregelter Bewegung unter den gleichen Anfangsbedingungen.

Zusammenfassung.

Die Untersuchung über Schwarz-Weiß-Regelung haben gezeigt, daß es wünschenswert ist, die Regelung so zu bauen, daß man nach wenigen Regeltakten auf Schaltpunkte im Grenzgebiet (Randpunktgebiet) stößt, nach denen die Bewegung zu einer Kriechbewegung wird mit überlagerter schneller Schwingung kleiner Amplitude. Die Ausdehnung dieses Grenzgebiets in der Ebene oder dem Raum der Schaltwerte (je nach der Ordnung des Problems) hängt von den Koeffizienten der Systemgleichungen und den Regelparametern ab. Das Abklingen der Kriechbewegung hängt ebenfalls von den Regelparametern und von Beiwerten der Systemgleichungen ab, die Restschwingung um die Kriechbewegung wird durch die Größe der Schaltverschiebungen bestimmt. Diese müssen deshalb klein gehalten werden.

Theorie und Praxis der Periodogrammanalyse von Registrierkurven, die im wesentlichen aus nichtpersistenten Wellenzügen bestehen.

Von H. Blume.

Die mathematischen Bedingungen der Quasipersistenz werden für den Fall abgeleitet, daß die Registrierkurve im wesentlichen aus Wellenzügen konstanter Frequenz und Phase, aber beliebig veränderlicher Amplitude besteht.

The mathematic conditions of the "Quasi-persistence" (= persistence so to speak) are demonstrated for the case supposing that the registering curve is essentially consisting of undulations of constant frequency and phase, but of arbitrarily variable amplitude.

Les conditions mathématiques de la quasi-persistence sont démontrées pour le cas où la courbe enregistrée est essentiellement constituée par un train d'oscillations de phase et de fréquence constantes, mais d'une amplitude variable de façon arbitraire.

Математические условия „сверх-устойчивости“ (квазиперсистенция) выводятся для того случая, когда регистрационная кривая состоит из ряда колебаний постоянной частоты и фазы, но произвольно изменяющейся амплитуды.

Die praktische Verwendbarkeit der Periodogrammanalyse beruht auf ihrer Tragweite für die Frequenz- und Amplitudenberechnung über den einfachen Fall einer persistenten Welle hinaus, aus dem sie abgeleitet ist ¹⁾. Denn in der Praxis kommt es kaum vor, daß eine Registrierkurve wesentlich aus persistenten Wellenzügen besteht. Es ist deshalb grundsätzlich wichtig,

¹⁾ Stumpff: Grundlagen und Methoden der Periodenforschung. Berlin 1937; Blume und Kolb: Über die Analyse von Registrierkurven von Schwingungsmessern mit Hilfe des Harmonischen Analysators nach dem Periodogramverfahren. Z. Instrumentenkde. (noch nicht erschienen).

die mathematischen Bedingungen zu kennen, unter denen man auch dann mit Hilfe der Periodogrammrechnung die Frequenzen und Amplituden in einer Registrierkurve bestimmen kann, wenn sie wesentlich aus nichtpersistenten Wellenzügen gebildet ist. Stumpf kennzeichnet diesen Gültigkeitsbereich der Periodogrammanalyse mit dem Ausdruck „Quasipersistenz“. Im folgenden soll die mathematische Grundlage der Quasipersistenz für den Fall abgeleitet werden, daß die Wellenzüge konstante Frequenz und Phase, aber irgendwie veränderliche Amplitude besitzen. Diese Verhältnisse kommen gerade bei Registrierkurven von Erschütterungsvorgängen häufig vor. Dabei wird vorausgesetzt, daß der Bereich einer solchen Registrierkurve groß ist gegenüber der Länge des gewählten Analysenintervalles. Der Grenzfall eines kurzen Wellenzuges und großen Analysenintervalls ist durch den Verfasser schon früher behandelt worden²⁾

§ 1. Periodogrammanalyse einer Kurve konstanter Frequenz und linear veränderlicher Amplitude.

Gegeben sei ein Wellenzug der analytischen Form $y = (at + b) \cos(\alpha t - \beta)$ (Bild 1). Das Analysenintervall der Länge p soll sich vom Punkte $q > 0$ bis $q + p$ der waagerechten Achse erstrecken, und die Analyse der Kurve soll so vorgenommen werden, daß der Punkt q schritt-

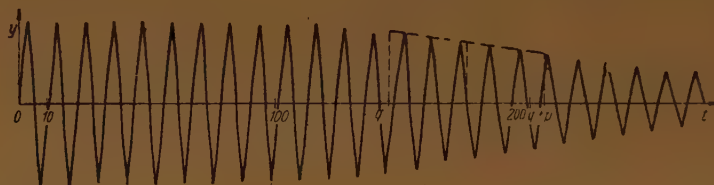


Bild 1. Kurve konstanter Frequenz mit einem Bereich konstanter und linear abfallender Amplituden.

weise um die konstante Größe $\Delta q > 0$ verändert wird. Für einen beliebigen Punkt q liefert dann der Harmonische Analysator die Lösung des verallgemeinerten Fourierkoeffizienten, der in komplexer Schreibweise lautet:

$$a(x, q) + i b(x, q) = \frac{1}{p} \int_q^{q+p} (at + b) e^{i[(x-\alpha)t - qx + \beta]} dt + \frac{1}{p} \int_q^{q+p} (at + b) e^{i[(x+\alpha)t + qx - \beta]} dt \quad (1).$$

Die Auswertung ergibt nach einiger Umformung:

$$\left. \begin{aligned} a(x, q) + i b(x, q) &= (aq + b) \frac{\sin(x - \alpha)p/2}{(x - \alpha)p/2} e^{i[(x - \alpha)p/2 - \alpha q + \beta]} \\ &+ \frac{a}{x - \alpha} i \left\{ \frac{\sin(x - \alpha)p/2}{(x - \alpha)p/2} e^{i[(x - \alpha)p/2 - \alpha q + \beta]} - e^{i[(x - \alpha)p - \alpha q + \beta]} \right\} \\ &+ (aq + b) \frac{\sin(x + \alpha)p/2}{(x + \alpha)p/2} e^{i[(x + \alpha)p/2 + \alpha q - \beta]} \\ &+ \frac{a}{x + \alpha} i \left\{ \frac{\sin(x + \alpha)p/2}{(x + \alpha)p/2} e^{i[(x + \alpha)p/2 + \alpha q - \beta]} - e^{i[(x + \alpha)p + \alpha q - \beta]} \right\} \\ &= y(x, q) + \eta(x, q) \end{aligned} \right\} \quad (1a).$$

Die Summe der beiden ersten Integrale in Gl. (1a) bildet den Hauptvektor. Sie sei mit $y(x, q)$ bezeichnet, die Summe der beiden letzten der Störvektor $\eta(x, q)$.

Es werde zunächst gefragt, welchen Wert der Hauptvektor für den Fall $x = \alpha$ annimmt. Die Durchführung des Grenzübergangs liefert rechnerisch den Wert:

$$y(\alpha, q) = \left(aq + b + \frac{1}{2} ap \right) e^{i[-\alpha q + \beta]} \dots \dots \dots (2).$$

Das Resultat bedeutet folgendes: Stimmt die Versuchsfrequenz $x_n = \frac{2\pi}{p} n$ ($n = 1, 2, \dots$) für ein $n = n'$ mit der Frequenz $\alpha = \frac{2\pi}{p} r$ überein, ($n' = r$) so besitzt das Phasendiagramm für diese Versuchsfrequenz x_n , die Neigung $-\alpha$. Die Amplitude in der runden Klammer stellt das arithmetische Mittel der Ordinaten der linearen Gleichung $z = at + b$ innerhalb des Analysenintervalles p dar, wie Bild 1 veranschaulicht. Infolgedessen zeigt das Amplituden-Diagramm

²⁾ H. Blume: Über die Analyse kurzer Kurvenzüge. Z. angew. Math. Mech. Bd. 23 (1943), S. 346—358.

$y(\alpha, q)$ in Abhängigkeit von q die Veränderung dieses Mittelwertes, d. h. es ist eine Gerade mit derselben Neigung, wie der lineare Abfall der Amplitude der Ausgangswelle.

Man kann die Bedingungen feststellen, unter denen der Störvektor $\eta(x, q)$ für den Fall $x = \alpha$ gegenüber dem Hauptvektor vernachlässigbar klein ist. Die Abschätzung lehrt, daß der Absolutbetrag $|\eta(\alpha, q)| \leq 2 \frac{1}{\pi(n+r)}$, wenn man ein Glied $\frac{1}{\pi^2(n+r)^2}$ vernachlässigt. Dabei gibt die Zahl r an, wie oft die Wellenlänge der gegebenen Frequenz α in dem Analysenintervall enthalten ist, wobei r eine positive rationale Zahl ist. Für $r = 6$ ist dieser Betrag kleiner als $\frac{1}{20}$. Setzt man diese Annahme als erfüllt voraus, so werden also das Amplituden- und Phasendiagramm von Gl. (1a) für den Fall $x_n = \alpha$ im wesentlichen durch den Hauptvektor allein dargestellt.

Es bleibt noch zu zeigen, daß der Absolutbetrag des Hauptvektors $y(x, q)$ nur in der Umgebung von $x = \alpha$ wesentlich von Null verschieden ist. Von dem ersten Summanden in Gl. (1a) ist es bekannt, daß er sein größtes Maximum mit dem Wert $|aq + b|$ in $x = \alpha$ besitzt. Es bleibt also zu beweisen, daß dies auch von dem zweiten Summanden gilt. Nun ist:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a}{x-\alpha} \left\{ \frac{\sin(x-\alpha)p/2}{(x-\alpha)p/2} e^{i[(x-\alpha)p/2 - \alpha q + \beta]} - e^{i[(x-\alpha)p - \alpha q + \beta]} \right\} \right| \\ & \leq \left| \frac{a}{x-\alpha} \left\{ e^{i[(x-\alpha)p/2 - \alpha q + \beta]} - e^{i[(x-\alpha)p - \alpha q + \beta]} \right\} \right| \\ & = 2 \frac{a}{x-\alpha} \sin(x-\alpha) \frac{p}{4} = \frac{1}{2} a p \frac{\sin(x-\alpha)p/4}{(x-\alpha)p/4}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck hat ebenfalls bei $x = \alpha$ sein größtes Maximum, und zwar mit dem Wert $\frac{1}{2} a p$.

Somit ist der Hauptvektor für alle x vernachlässigbar klein, die nicht in der Umgebung von $x = \alpha$ liegen. Nun besteht der Hauptvektor $y(x, q)$ ($x \neq \alpha$) aus zwei Vektoren, die sich in Abhängigkeit von q beide mit der Winkelgeschwindigkeit $-\alpha$ um den Nullpunkt drehen, wenn man sie in einer komplexen Ebene vom Nullpunkt aus aufzeichnet. Der Absolutbetrag des ersten Vektors ist $(aq + b) \frac{\sin(x-\alpha)p/2}{(x-\alpha)p/2}$; er ist also mit q veränderlich, während der Absolutbetrag des zweiten von q unabhängig, nicht größer als $\frac{1}{2} a p \frac{\sin(x-\alpha)p/4}{(x-\alpha)p/4}$ ist und für $x \rightarrow \alpha$ den Wert $\frac{1}{2} a p$ annimmt.

Der resultierende Vektor dieser beiden Vektoren, der ja gleich dem Hauptvektor ist, wird also um so genauer für einen Wert x in der Umgebung von $x = \alpha$ sich mit derselben Winkelgeschwindigkeit $-\alpha$ drehen, je weniger der erste Vektor sich im Verhältnis zum zweiten mit seiner Amplitude ändert. Nun variiert für $x = \alpha$ die Amplitude des ersten Teilvektors von $y(x, q)$ bei einer Verschiebung um den Betrag Δq um $a \Delta q$. Diese Größe muß also klein sein im Verhältnis zu $\frac{1}{2} a p$, d. h. bei gegebenem a muß p groß sein, was wiederum nur möglich ist, wenn b genügend groß ist. Daraus folgt, daß man durch die Periodogrammanalyse einer Welle mit konstanter Frequenz und linearer Amplitudenänderung unter den angegebenen, ziemlich

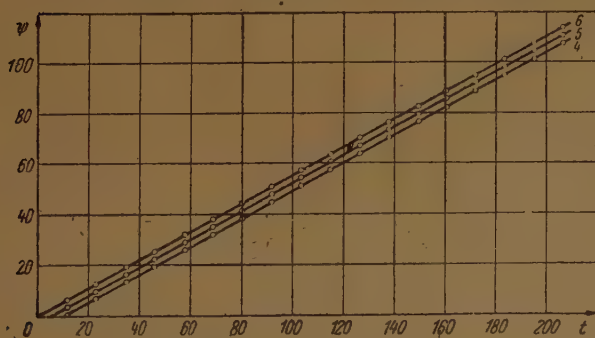


Bild 2. Phasendiagramm von Kurve in Bild 1.

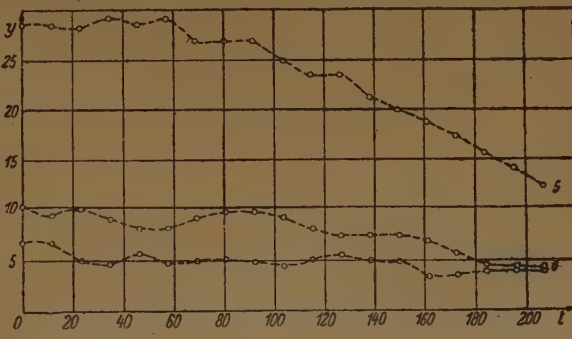


Bild 3. Amplitudendiagramm von Kurve in Bild 1.

allgemeinen Bedingungen die richtige Frequenz α aus der Neigung des Phasendiagramms der Versuchsfrequenzen x_n in der Nähe von α bestimmen und damit nach Gl. (2) aus dem Amplitudendiagramm auch den Amplitudenverlauf berechnen kann.

Ein Beispiel möge die abgeleiteten Verhältnisse veranschaulichen: Bild 2 zeigt das Phasendiagramm der Periodogrammanalyse der Kurve in Bild 1. Man sieht die Parallelität der Geraden für die Versuchsfrequenzen: $n = 4, 5$ und 6 . Da in Bild 1 die Wellenlänge der Kurve im Analysenintervall $p = 61$ mm 5,3 mal enthalten ist, muß als Neigung im Phasendiagramm 5,3 erscheinen. Man mißt für n_6, n_5, n_4 der Reihe nach die Werte: 5,39; 5,35; 5,36. Das bedeutet eine Übereinstimmung innerhalb 1%. Die Neigung im Amplitudendiagramm Bild 3 ist identisch mit der Neigung der Amplitudenfunktion in Bild 1, wenn man den Verzerrungsfaktor der beiden Abbildungen berücksichtigt.

§ 2. Die Periodogrammanalyse einer Kurve konstanter Frequenz und exponentiell veränderlicher Amplitude.

Der Wellenzug habe die analytische Form: $y = e^{-\rho t} \cos(\alpha t - \beta)$. Die verallgemeinerten Fourierkoeffizienten in komplexer Schreibform sind dann:

$$\begin{aligned} a(x, q) + i b(x, q) &= \frac{1}{p} \int_q^{q+p} e^{-\rho t + i[(x-\alpha)t - qx + \beta]} dt + \frac{1}{p} \int_q^{q+p} e^{-\rho t + i[(x+\alpha)t + qx - \beta]} dt \\ &= \frac{e^{-\rho q}}{p[-\rho + i(x-\alpha)]} \left\{ e^{-\rho p + i[(x-\alpha)p - \alpha q + \beta]} - e^{i[-\alpha q + \beta]} \right\} \\ &\quad + \frac{e^{-\rho q}}{p[-\rho + i(x+\alpha)]} \left\{ e^{-\rho p + i[(x+\alpha)p + \alpha q - \beta]} - e^{i[\alpha q - \beta]} \right\} = y(x, q) + \eta(x, q) \end{aligned} \quad \dots (3).$$

Im Hauptvektor $y(x, q)$ steht in der geschweiften Klammer die Differenz zweier Vektoren, deren Absolutbeträge von q unabhängig sind und deren Argumente linear von q abhängen mit dem Proportionalitätsfaktor $-\alpha$. Daraus folgt, daß das Phasendiagramm des Hauptvektors für jede Versuchsfrequenz x eine Gerade mit der Neigung $-\alpha$ darstellt, d. h. die Frequenz kann aus dem Phasendiagramm bestimmt werden für alle x , bei denen der Störvektor $\eta(x, q)$ gegenüber dem Hauptvektor, absolut genommen, vernachlässigbar klein ist. Um dies zu entscheiden, bildet man den Quotienten d der Absolutbeträge beider Vektoren an der Stelle $x = \alpha$. Man erhält:

$$|y(x, q)|^2 = \frac{e^{-2\rho q}}{p^2[\rho^2 + (x-\alpha)^2]} \left\{ 1 + e^{-2\rho p} - 2e^{-\rho p} \cos(x-\alpha)p \right\} \dots (4a),$$

$$|\eta(x, q)|^2 = \frac{e^{-2\rho q}}{p^2[\rho^2 + (x+\alpha)^2]} \left\{ 1 + e^{-2\rho p} - 2e^{-\rho p} \cos(x+\alpha)p \right\} \dots (4b).$$

Eine Abschätzung lehrt, daß für d folgende Ungleichung gilt:

$$d \leq \frac{(1 + e^{-\rho p})\rho}{\sqrt{\rho^2 + 4\alpha^2}(1 - e^{-\rho p})} \dots (5).$$

Setzt man hier $\alpha = \frac{2\pi}{p}r$ und $\frac{\rho}{\alpha} = \varepsilon$, so erhält man für die rechte Seite:

$$d' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + 4}} \cdot \frac{1 + e^{-2\pi r\varepsilon}}{1 - e^{-2\pi r\varepsilon}} \dots (6a).$$

Dieser Ausdruck strebt mit $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen $\frac{1}{2\pi r}$ und mit $\varepsilon \rightarrow \infty$ gegen den Wert 1. Die Ausrechnung lehrt, daß für $r \geq 3$ und $\varepsilon \leq 0,2$ der Wert $d' \leq 0,1$ ist. Daraus folgt: Wenn das Analysenintervall p mindestens 3 Wellenlängen der Ausgangswelle umfaßt und $\varepsilon = \frac{\rho}{\alpha} \leq 0,2$ ist,

so ist der Störvektor praktisch vernachlässigbar klein. Die Einschränkung für ε bedeutet, daß beim Fortschreiten auf der t -Achse um eine Wellenlänge die Amplitude der Welle nicht um mehr als 28% ihres Wertes fallen darf. Es bleibt noch zu zeigen, daß der Hauptvektor für solche Werte von x , die nicht dem Wert α benachbart sind, vernachlässigbar klein ist, gegenüber seiner Größe für die Werte von x in der Umgebung α . Durch Differentiation von Gl. (4a) zeigt man, daß der Absolutbetrag des Hauptvektors an der Stelle $x = \alpha$ ein Maximum besitzt und alle übrigen Maxima symmetrisch zu dieser Stelle liegen. Die Tatsache, daß an der Stelle $x = \alpha$ das Hauptmaximum liegt, ergibt sich leicht aus folgender Ungleichung:

$$\frac{e^{-2\rho q}(1 - e^{-\rho p})^2}{p^2[\rho^2 + (x-\alpha)^2]} \leq \frac{e^{-2\rho q}[1 + e^{-2\rho p} - 2e^{-\rho p} \cos(x-\alpha)p]}{p^2[\rho^2 + (x-\alpha)^2]} \leq \frac{e^{-2\rho q}(1 + e^{-\rho p})^2}{p^2[\rho^2 + (x-\alpha)^2]} \quad (6b).$$

Die beiden äußeren Formeln dieser Ungleichung stellen Kurven dar, die einander parallel im Abstände $\frac{4e^{-2\rho q} \cdot e^{-\rho p}}{p^2[\rho^2 + (x-\alpha)^2]}$ (oberhalb der x -Achse) verlaufen. Jede dieser beiden Kurven be-

sitzt bekanntlich als Funktion von x bei $x = \alpha$ ein einziges Maximum und ist nur in der Nachbarschaft $x = \alpha$ wesentlich von Null verschieden. Der Abstand beider Parallelkurven wird für große Werte q p unendlich klein. Dies ist grundsätzlich erfüllbar, da p genügend groß gewählt werden kann.

Zusammenfassend kann man feststellen, daß unter den angenommenen Bedingungen im Phasendiagramm für alle Versuchsfrequenzen x in der Nähe von $x = \alpha$ gerade Linien mit der Neigung $x = -\alpha$ entstehen, d. h. die Frequenz α ist aus dem Phasendiagramm bestimmbar. Das Amplitudendiagramm verläuft nach demselben Exponentialgesetz wie die Grundwelle. Nach Kenntnis von α sind also die Anfangsamplitude und der Exponentialabfall berechenbar.

§ 3. Theorie und Praxis der Periodogrammanalyse von Kurven konstanter Frequenz und beliebig veränderlicher Amplitude.

Es sei $z = f(t) > 0$ der analytische Ausdruck der integrierbaren Amplitudenfunktion einer Welle mit der Kreisfrequenz α und der Anfangsphase β ; d. h. es sei:

$$y = f(t) \cos(\alpha t - \beta) \quad (7)$$

die Gleichung der Welle. Ihr verallgemeinerter Fourierkoeffizient lautet in komplexer Schreibweise:

$$g(x, q) = a(x, q) + i b(x, q) = e^{(-q x + \beta) i} \frac{1}{p} \int_q^{q+p} f(t) e^{i(x-\alpha)t} dt + e^{(-q x - \beta) i} \frac{1}{p} \int_q^{q+p} f(t) e^{i(x+\alpha)t} dt \quad (8).$$

Der erste Summand ist der Hauptvektor $y(x, q)$ und der zweite der Störvektor $\eta(x, q)$. Ausschlaggebend für die Lösung des vorliegenden Problems ist es zu wissen, unter welchen Voraussetzungen für $f(t)$ die Gl. (8) folgendes unbestimmte Integral besitzt:

$$g(x, q) = e^{(-q x + \beta) i} \frac{1}{p} F\{t, i(x-\alpha)\} e^{i(x-\alpha)t} + e^{(-q x - \beta) i} \frac{1}{p} F\{t, i(x+\alpha)\} e^{i(x+\alpha)t} \quad (9).$$

Dies ist offenbar erfüllt, wenn $f(t) > 0$ entweder monoton zu- oder abnehmend ist. Es gilt aber auch für den Fall, daß $f(t)$ eine ganze rationale Funktion n -ten Grades ist, da man durch wiederholte partielle Integration zeigt:

$$\frac{1}{p} \int_q^{q+p} f(t) e^{i(x-\alpha)t} dt = \left\{ e^{i(x-\alpha)t} \left[\frac{f(t)}{(x-\alpha)i} - \frac{f'(t)}{(x-\alpha)^2 i^2} + \dots + (-1)^n \frac{f^{(n)}(t)}{(x-\alpha)^{n+1} i^{n+1}} \right] \right\} \frac{1}{p}.$$

Den Wert für $\eta(\alpha, q)$ erhält man aus dieser Gleichung, indem man in ihr α durch $-\alpha$ ersetzt. Da sich praktisch jede aperiodische Amplitudenfunktion $f(t)$ durch eine ganze rationale Funktion beliebig genau annähern läßt, so ist es tragbar, sich auf das Vorhandensein einer der drei genannten Fälle für das Aussehen von $f(t)$ zu beschränken. Die Auswertung von Gl. (9) liefert dann für den Hauptvektor

$$y(x, q) = \frac{1}{p} F\{q+p, i(x-\alpha)\} \cdot e^{i[(x-\alpha)p - \alpha q + \beta]} - \frac{1}{p} F\{q, i(x-\alpha)\} e^{i(-\alpha q + \beta)} \quad (10).$$

Für den Fall $x = \alpha$ muß der Hauptvektor existieren und sein Absolutbetrag ein absolutes Maximum besitzen, da folgende Ungleichung gilt:

$$\left| \int_q^{q+p} f(t) e^{i(x-\alpha)t} dt \right| \leq \int_q^{q+p} f(t) dt.$$

Aus Gl. (10) erhält man den Störvektor $\eta(x, q)$, indem man in ihr den Wert α durch $-\alpha$ und $-\beta$ durch $+\beta$ ersetzt. Daraus folgt sofort, daß der Absolutbetrag des Störvektors an der Stelle $x = \alpha$ kleiner sein muß als der des Hauptvektors. Dies bedeutet für das Phasendiagramm folgendes: Für $x = \alpha$ nimmt Gl. (9) die Form an:

$$g(\alpha, q) = \frac{1}{p} \left\{ F(q+p) - F(q) \right\} e^{i(-\alpha q + \beta)} + \frac{1}{p} \left\{ F(q+p, 2\alpha i) - F(q, 2\alpha i) \right\} e^{i(\alpha q - \beta)}.$$

Da im Argument des Hauptvektors die Variable q linear mit der Kreisfrequenz $-\alpha$ als Faktor vorkommt, so muß im Phasendiagramm für $x = \alpha$ die Kreisfrequenz $-\alpha$ als Neigung erscheinen. Denn, wie in der Arbeit Blume und Kolb l. c. nachgewiesen ist, kommt im Phasendiagramm bei Überlagerung zweier Wellen auf derselben Harmonischen grundsätzlich diejenige Frequenz zur Anzeige, deren Vektor die größere Amplitude besitzt, und das ist hier, wie bewiesen, der Hauptvektor $y(\alpha, q)$.

Um aber die Frequenz $-\alpha$ aus dem Phasendiagramm allein erkennen zu können, ist es offenbar erforderlich, daß mindestens für alle Versuchsfrequenzen x , die in genügender Nähe von

$x = \alpha$ liegen, ebenfalls die Neigung $-\alpha$ angezeigt wird. Daher müssen die Bedingungen festgestellt werden, unter denen dies erfüllt ist. Zu dem Zwecke denkt man sich die beiden Teilvektoren, die nach Gl. (10) den Hauptvektor $y(x, q)$ bilden, in einer komplexen Ebene vom Nullpunkt aus aufgetragen.

Bei einer Änderung von q um den Betrag $\Delta q > 0$ drehen sich dann zwar beide Teilvektoren von $y(x, q)$ mit der Winkelgeschwindigkeit $-\alpha$ um den Nullpunkt, da ihre Phasenlage zueinander von q unabhängig ist und q linear mit dem Faktor $-\alpha$ in ihrem Argument vorkommt. Im allgemeinen aber ändert sich dabei das Verhältnis der Absolutbeträge beider Vektoren. Infolgedessen wird sich der resultierende Vektor $y(x, q)$ allgemein nicht mit der Winkelgeschwindigkeit $-\alpha$ drehen.

Ist jedoch das Analysenintervall p groß gegenüber der zur Kreisfrequenz α gehörigen Wellenlänge $\frac{2\pi}{\alpha}$, d. h. $p = \frac{2\pi}{\alpha} r$ und r groß, so wird für solche Versuchsfrequenzen $x_n = \frac{2\pi}{p} n$ ($n = 1, 2, \dots$), die in der Nähe von $x = \alpha$ liegen, der Ausdruck $(x - \alpha) = \frac{2\pi}{p}(n - r)$ klein, und man kann setzen:

$$F\{q + p, i(x - \alpha)\} \sim F(q + p) \text{ und } F\{q, i(x - \alpha)\} \sim F(q).$$

Für derartige Versuchsfrequenzen kann also die Gl. (10) folgendermaßen geschrieben werden:

$$y(x, q) \sim e^{i(-\alpha q + p)} \cdot \frac{1}{p} \left\{ F(q + p) \cdot e^{i(x - \alpha)p} - F(q) \right\} \quad (10 a).$$

Aus dieser Form ergibt sich aber folgendes:

Bei einer Änderung von q um den Betrag Δq wird sich $y(x, q)$ mit der Winkelgeschwindigkeit $-\alpha$ um den Nullpunkt drehen, wenn der Ausdruck:

$$f(t_m) = \frac{1}{p} \left\{ F(q + p) - F(q) \right\} \quad (10 b)$$

dabei konstant bleibt.

Dieselbe Drehung wird erfolgen, wenn $F(q + p) - F(q) = \varphi(q, p) [F^*(p) - k]$, wo k eine Konstante und $\varphi(q, p)$ eine Funktion von q mit dem Parameter p bedeutet. Da die Differenz auf der linken Seite der Flächeninhalt zwischen $f(t)$ und der t -Achse und den Ordinaten in q und $q + p$ ist, so gilt der letztere Fall dann und nur dann, wenn $f(t)$ eine Exponentialfunktion ist. Er ist im § 2 behandelt worden.

Die Größe $f(t_m)$ nach Gl. (10b) stellt den arithmetischen Mittelwert der Amplitude der Amplitudenfunktion $f(t)$ über dem Intervall p im Bereich q und $q + p$ dar. Wenn $f(t_m)$ bei einer Verschiebung um $\Delta q > 0$ also unverändert bleibt, so dreht sich $y(x, q)$ mit der Winkelgeschwindigkeit $-\alpha$. Für die Praxis ist es offenbar hinreichend, wenn $f(t_m)$ bei einer solchen Verschiebung sich relativ wenig ändert. Ein solcher Fall ist im ersten Paragraphen ausführlich besprochen worden, wo $f(t)$ eine linear abfallende Funktion war. Der Fall einer relativ geringen Änderung von $f(t_m)$ bei einer Verschiebung Δq kann aber nicht nur vorkommen, wenn $f(t)$ eine monotone Funktion ist. Es kann z. B. sein, daß $f(t)$ viele Schwankungsstellen im Bereich q bis $q + p$ besitzt und dennoch $f(t_m)$ sich bei einer Verschiebung $\Delta q \ll p$ relativ wenig ändert.

Gerade dieser Fall kommt bei Registrierkurven aus Erschütterungsvorgängen häufig vor, wenn man das Analysenintervall genügend groß nimmt. (Siehe das Schlußbeispiel in der Arbeit Blume-Kolb l. c.)

Damit ist es mathematisch klar geworden, warum man im Phasendiagramm auch dann eine verhältnismäßig genaue Frequenzanzeige erhält, wenn die Amplitude im einzelnen ziemlich schwankenden Verlauf hat.

Im Amplitudendiagramm, wo $f(t_m)$ als Funktion von q angezeigt wird, kommen alle diejenigen Eigenschaften der Amplitudenfunktion $f(t)$ nicht zum Vorschein, die bei der Mittelbildung verlorengehen, d. h. aber die Gesetzmäßigkeit im großen zeigt sich auch in ihm. Ist z. B. $f(t)$ eine ganze rationale Funktion n -ten Grades, so ist auch $f(t_m)$ eine solche; oder ist $f(t)$ eine Exponentialfunktion, gilt dies auch für $f(t_m)$ usw. Man kann daher aus dem Verlauf des Amplitudendiagramms auf die Gesetzmäßigkeit von $f(t)$ im großen zurückschließen.

Ganz besonders vorteilhaft ist die Periodogrammanalyse, wenn es sich um das Problem der Abschirmung von Erschütterungen handelt, da hier eine möglichst genaue Kenntnis der Frequenzen erwünscht ist, während es genügt, von den zugehörigen Amplituden ihre Mittelwerte zu kennen, um abschätzen zu können, ob eine Frequenz in ihrer Wirkung gegenüber einer anderen unberücksichtigt bleiben kann oder nicht.

Der Fall $f(t) = \text{konstans}$, für den allein die Gesetzmäßigkeit des Verhaltens im Amplituden- und Phasendiagramm abgeleitet wird, ist einfachster Sonderfall der angegebenen Theorie.

Eingegangen am 7. 2. 44.

Eine Wahrscheinlichkeitstheoretische Behandlung der Jokereigenschaft.

Von Hans Münzner in Göttingen¹⁾.

Die Eigenschaft, daß in einem Spiel einer Karte die Gültigkeit einer beliebigen Karte zukommt (Joker beim Rommé), wird einem Wahrscheinlichkeitsmodell zugrunde gelegt und die Wirksamkeit dieser Eigenschaft an einem Beispiel gezeigt. Die Ergebnisse werden auf das Verfahren der Kundenwerbung durch den Packungen beigelegte Gutscheine angewendet.

The property that the value of one card of the suit is to apply to that of any card to one's liking (e. g. the "joker" for Rommé) is taken as basis of a model of probabilities and the efficiency of this property is demonstrated by virtue of an example.

The results are applied to the practice of puffing one's goods by extra tickets enclosed in packages.

La propriété, par laquelle une certaine carte est susceptible de prendre la valeur de n'importe quelle autre carte du jeu (p. exp. »joker« dans poker) a été prise pour base d'un modèle de probabilité et son efficacité illustrée par un exemple. Les résultats sont appliqués à une méthode de reclame par les bons joints aux paquets.

В основу модели вероятности положено то свойство карточной игры, когда определенная карта (напр. „джокер“ в покере) может принимать значение любой другой карты колоды, причем эффективность этого свойства пояснена на примере. Результаты применены к методу рекламы путем вкладывания выигрышных талонов в упаковку.

Jakob Bernoulli erwähnt im 18. Abschnitt des 3. Teiles seiner „Ars conjectandi“ (1713) verschiedene Kartenspiele, bei denen einzelne bestimmte Karten nach Belieben an Stelle jeder anderen Karte des Spieles verwendet werden dürfen. Es werden das deutsche Treschak (auch unter Breffling oder Krimpspiel bekannt), das französische Brelan und das spanische L'hombre-Spiel genannt. Gegenwärtig ist von derartigen Kartenspielen am meisten das Rommé verbreitet, bei dem den J o k e r n die Gültigkeit einer jeden beliebigen Karte zukommt. Wir werden diese Eigenschaft, die wir als Jokereigenschaft bezeichnen, einem einfachen Wahrscheinlichkeitsmodell (Urnschema) zugrunde legen und dann ein Problem behandeln, das besonders deutlich die Wirksamkeit dieser Eigenschaft zeigen wird. In einem der Beispiele wird dann das gewonnene Ergebnis auf ein Verfahren der Kundenwerbung, nämlich auf die Werbung durch Gutscheine, die einzelnen Warenpackungen beigelegt werden, angewendet.

Eine Urne enthält a mit einer Null und je m mit den Nummern $1, 2, \dots, n$ beschriftete Kugeln. Ihre Gesamtzahl sei mit $N = n m + a$ bezeichnet. Die Ziehungen, die aus der gut durchgemischten Urne vorzunehmen sind, sollen ohne Zurücklegen der bereits gezogenen Kugeln erfolgen, so daß Abhängigkeit zwischen den einzelnen Ziehungen besteht.

Wir fragen nach der mittleren Anzahl $H(n, m, a) = H$ der Ziehungen, die man machen muß, bis man eine vollständige Serie der Nummern $1, 2, \dots, n$ erhalten hat. Dabei soll gestattet sein, die gezogenen Kugeln mit der Beschriftung Null, die wir im folgenden kurz Nullkugeln nennen wollen, an Stelle beliebiger noch fehlender Nummern zu verwenden (Jokereigenschaft). Es liegt also z. B. bei $n = 50$ schon mit 46 verschiedenen Nummern und 4 Nullkugeln eine vollständige Serie aller Nummern vor. Außer dem Mittelwert H wird noch der zugehörige mittlere Fehler σ ermittelt. Da es sich hier um die Zufallsveränderlichkeit der Ziehungsanzahl s bei festgelegtem Ziehungsergebnis (eine vollständige Serie) handelt, gehört das hier betrachtete Problem dem P a s c a l'schen Problemkreis an.

Die folgende Berechnung besteht im wesentlichen in der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit $w(s)$, daß in s Ziehungen aus der Urne keine vollständige Serie der Nummern 1 bis n erscheint. Für $s < n$ ist $w(s) = 1$. Die Differenz $w(s-1) - w(s)$ ist dann die Wahrscheinlichkeit $P(s)$ dafür, daß gerade mit der s -ten Ziehung die Serie vollständig wird. Der gesuchte Mittelwert ergibt sich bei Beachtung von $w(N) = 0$ auf Grund der üblichen Definition als

$$H(n, m, a) = \sum_{s=0}^N s P(s) = \sum_{s=1}^N s [w(s-1) - w(s)] = \sum_{s=0}^N w(s) \dots \dots \dots (1).$$

Für das mittlere Fehlerquadrat σ^2 erhalten wir

$$\sigma^2 = \sum_{s=0}^N (s - H)^2 P(s) = \sum_{s=1}^N s^2 [w(s-1) - w(s)] - H^2 = 2 \sum_{s=0}^N (s+1) w(s) - H - H^2 \dots \dots \dots (2).$$

Die Wahrscheinlichkeit $w(s)$ führen wir zurück auf die leichter anzugebende Wahrscheinlichkeit $u(s, k, r)$, daß in s Ziehungen gerade k Nullkugeln erscheinen und dabei r verschiedene, bestimmte Nummern fehlen. Von $\binom{N}{s} = \binom{nm+a}{s}$ möglichen Fällen sind hierfür $\binom{a}{k} \cdot \binom{nm}{r} \cdot \binom{nm-r}{s-k}$ Fälle günstig, so daß wir

¹⁾ Aus dem Institut für mathematische Statistik und Wirtschaftsmathematik der Universität Göttingen.

$$u(s, k, r) = \frac{\binom{a}{k} \binom{nm-rm}{s-k}}{\binom{nm+a}{s}} \dots \dots \dots (3)$$

erhalten. Mit $v(s, k)$ bezeichnen wir nun die Wahrscheinlichkeit, daß in s Ziehungen genau k Nullkugeln gezogen werden und mindestens $k+1$ verschiedene Nummern fehlen. Wie gleich gezeigt wird, ergibt sich

$$v(s, k) = \sum_{r=k+1}^n (-1)^{k+r-1} \binom{n}{r} \binom{r-1}{k} u(s, k, r) \dots \dots \dots (4).$$

Das erste Glied der rechten Seite von (4) stellt die Summe der Wahrscheinlichkeiten dar, die für das Fehlen der $\binom{n}{k+1}$ verschiedenen $k+1$ -Tupel bestehen. Es lautet daher $\binom{n}{k+1} u(s, k, k+1)$.

Dabei ist für jedes der $\binom{n}{k+2}$ verschiedenen $k+2$ -Tupel die Wahrscheinlichkeit $u(s, k, k+2)$ $k+2$ -mal mitgezählt worden, muß also $k+1$ -mal wieder abgezogen werden, da sie in $v(s, k)$ nur einmal berücksichtigt werden darf. Damit ist das zweite Glied der Formel (4) erklärt.

Die Wahrscheinlichkeit $u(s, k, k+3)$ ist nun für jedes $k+3$ -Tupel im ersten Glied $\binom{k+3}{2}$ -mal mitgezählt und im zweiten Glied $\binom{k+1}{1} \binom{k+3}{1}$ -mal abgezogen worden. Da sie in $v(s, k)$ für jedes

der $\binom{n}{k+3}$ verschiedenen $k+3$ -Tupel wiederum genau einmal enthalten sein muß, ist als drittes Glied $\binom{n}{k+3} \left[\binom{k+1}{1} \binom{k+3}{1} - \binom{k+3}{2} + 1 \right] u(s, k, k+3) = \binom{n}{k+3} \binom{k+2}{2} u(s, k, k+3)$ hinzuzufügen. Durch dieses abwechselnde Zuzählen und Abziehen entsteht Formel (4). Sie ist für $0 \leq k \leq n-1$ gültig und geht für $k=0$ in den bekannten Additionssatz (Odersatz) der Wahrscheinlichkeitsrechnung für sich gegenseitig nicht ausschließende Ereignisse über.

Da $v(s, k)$ als Wahrscheinlichkeit dafür aufgefaßt werden kann, daß in s Ziehungen k Nullkugeln erscheinen und dabei keine vollständige Serie aller n Nummern zustande kommt, ergibt sich die totale Wahrscheinlichkeit für das Nichtzustandekommen einer vollständigen Serie in s Ziehungen als

$$w(s) = \sum_{k=0}^{n-1} v(s, k) \dots \dots \dots (5).$$

Bei Beachtung von $\binom{0}{0} = 1$ und $\binom{a}{b} = 0$ für $b < 0$ und $b > a$ gilt diese Formel für $0 \leq s \leq N$, so daß (1) ohne Einschränkung angewendet werden kann. Setzen wir (3) in (4), (4) in (5) und (5) in (1) ein, so erhalten wir den gesuchten Mittelwert

$$H(n, m, a) = \sum_{s=0}^N \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{r=k+1}^n (-1)^{k+r-1} \frac{\binom{n}{r} \binom{r-1}{k} \binom{a}{k} \binom{nm-rm}{s-k}}{\binom{nm+a}{s}} \dots \dots \dots (6).$$

Die Summation über s läßt sich hierin, wie folgt, durchführen:

$$\sum_{s=0}^N \frac{\binom{nm-rm}{s-k}}{\binom{nm+a}{s}} = \frac{\sum_{s=0}^N \binom{s}{k} \binom{nm+a-s}{rm+a-k}}{\binom{rm+a}{k} \binom{nm+a}{rm+a}} = \frac{\binom{nm+a+1}{rm+a+1}}{\binom{rm+a}{k} \binom{nm+a}{rm+a}} = \frac{nm+a+1}{(rm+a+1) \binom{rm+a}{k}} \quad (7),$$

wobei die erste Gleichsetzung nach Darstellung der Binomialkoeffizienten durch Fakultäten sofort einzusehen ist und die Summierung selbst nach einer bekannten Formel der Kombinatorik (vgl. [3] Seite 251, Formel (26)) erfolgt.

Substituieren wir (7) in (6) und ersetzen wir die Summationsgrenzen $k+1 \leq r \leq n$ und $0 \leq k \leq n-1$ durch die neuen Grenzen $1 \leq r \leq n$ und $0 \leq k \leq r-1$, was entsprechend dem Dirichletschen Satz über die Vertauschung der Integrationsgrenzen bei Doppelintegralen erlaubt ist, so erhalten wir

$$H(n, m, a) = (nm+a+1) \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \frac{\binom{n}{r}}{rm+a+1} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \frac{\binom{r-1}{k} \binom{a}{k}}{\binom{rm+a}{k}} \dots \dots (8).$$

Nach Umformung von $\frac{\binom{a}{k}}{\binom{rm+a}{k}}$ in $\frac{\binom{rm+a-k}{rm}}{\binom{rm+a}{a}}$ kann nun auch die Summation über alle k vorgenommen werden (vgl. [3], Seite 252, Formel (27)).

Es ergibt sich schließlich

$$H(n, m, a) = (nm + a + 1) \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \binom{n}{r} \frac{\binom{r(m-1)+a+1}{a}}{\binom{rm+a}{a}} \cdot \frac{1}{rm+a+1} \quad \dots (9).$$

$$= (nm + a + 1) \sum_{r=1}^n C_r$$

In ähnlicher Weise entsteht aus (3), (4), (5) und (2) das mittlere Fehlerquadrat, das unter Verwendung der Hilfsgrößen

$$C_r = (-1)^{r-1} \binom{n}{r} \frac{\binom{r(m-1)+a+1}{a}}{\binom{rm+a}{a}} \cdot \frac{1}{rm+a+1} \quad \dots (10)$$

sich folgendermaßen darstellen läßt:

$$\sigma^2 = 2(nm + a + 1)(nm + a + 2) \sum_{r=1}^n C_r \frac{rm + a + 2 - ar - r}{(rm + a + 2)(rm + 2 - r)} - H(n, m, a) - H^2(n, m, a) \quad (11).$$

Von Interesse ist der Grenzübergang $m \rightarrow \infty$, $a \rightarrow \infty$ bei festgehaltenem $\frac{a}{m} = b$. Nach kurzer Rechnung erhalten wir aus (9)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} H(n, m, mb) = H(n, b) = (n+b) \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \binom{n}{r} \frac{r^{r-1}}{(r+b)^r} \quad \dots (12)$$

und ebenso aus (11)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma^2 = 2(n+b)^2 \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \binom{n}{r} \frac{r^{r-2}}{(r+b)^{r+1}} (r+b-rb) - H(n, b) - H^2(n, b) \quad \dots (13).$$

Man kann diese Grenzformeln auch direkt herleiten, wenn man von einer Urne ausgeht, bei der die für alle Ziehungen unverändert geltenden Wahrscheinlichkeiten $p = \frac{b}{n+b}$ für das Ziehen einer Nullkugel und $q = \frac{1}{n+b}$ für das Ziehen jeder der Nummern 1, 2, ..., n bestehen. Die Ziehungen sind hierim Gegensatz zum zuerst behandelten Urnenschema voneinander unabhängig, was praktisch durch Zurücklegen der gezogenen Kugel nach jedem Zug erreicht werden kann. Die direkte Herleitung verläuft genau so wie im allgemeinen Fall, lediglich die hypergeometrische Wahrscheinlichkeitsverteilung (3) ist durch die Binomialverteilung zu ersetzen.

Durch Umformung erhalten wir aus (9) und (11) bei $m \neq 0$ für $H(n, m, a)$ und σ^2 andere Ausdrücke, die einerseits den Anschluß an die bereits bekannten Formeln des Spezialfalls $a = 0$, $m \rightarrow \infty$ gestatten und andererseits für die numerische Berechnung bei größerem n und kleinerem a von Vorteil sind, da sich die Summationen nunmehr über $a+2$ bzw. $a+3$ Glieder statt über n Glieder erstrecken. Wir geben hier gleich die Endformeln an.

$$H(n, m, a) = (nm + a + 1) \sum_{v=0}^{a+1} (-1)^v \binom{a+1}{v} \frac{g(v)}{1 - \frac{m-1}{m}v} \quad \dots (14)$$

mit

$$g(v) = \frac{\left(1 - \frac{m-1}{m}v\right) \left(1 - \frac{m-1}{2m}v\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{(a+1)m}v\right)}{\left(1 + \frac{v}{m}\right) \left(1 + \frac{v}{2m}\right) \dots \left(1 + \frac{v}{nm}\right)} \quad \dots (15)$$

und

$$\sigma^2 = (nm + a + 1)(nm + a + 2) \sum_{v=0}^{a+2} (-1)^v \binom{a+2}{v} \frac{g(v) \left(1 - \frac{m-a-1}{(a+2)m}v\right)}{\left(1 - \frac{m-1}{m}v\right) \left(1 - \frac{m-1}{2m}v\right)} - H - H^2 \quad (16).$$

Besonders hervorgehoben sei noch der Fall $a = 0$ in dieser zweiten Darstellung. Hier erhalten wir die einfache Formel

$$H(n, m, 0) = (nm + 1) \left[1 - \prod_{r=1}^n \left(1 + \frac{1}{rm} \right)^{-1} \right] \dots \dots \dots (17),$$

die beim Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ in den bereits bekannten Ausdruck

$$\lim_{m \rightarrow \infty} H(n, m, 0) = H(n, 0) = n \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} \dots \dots \dots (18)$$

übergeht [1], [2], [4]. Das dazugehörige mittlere Fehlerquadrat lautet dann für endliche m

$$\sigma^2 = (nm + 1) \left[(nm + 2) \prod_{r=1}^n \left(1 + \frac{2}{rm} \right)^{-1} - (nm + 1) \prod_{r=1}^n \left(1 + \frac{1}{rm} \right)^{-2} - \prod_{r=1}^n \left(1 + \frac{1}{rm} \right)^{-1} \right] \dots (19),$$

wie nach einigen Umformungen aus (16) folgt. Für den Grenzwert ergibt sich, wie bereits bekannt [2],

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma^2 = n^2 \sum_{r=1}^n \frac{1}{r^2} - n \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} \dots \dots \dots (20).$$

1. Beispiel. Wieviele Karten muß man im Mittel einem gut durchgemischten Quartettspiel von 12 Quartetten entnehmen, bis man von jedem Quartett mindestens eine Karte hat? Dabei sollen noch 0 Joker, bzw. 2 Joker, bzw. 4 Joker zusätzlich im Spiele sein. Nach den Formeln (9) bis (11) oder (14) bis (16) erhalten wir

$$\begin{aligned} H(12, 4, 0) &= 25,5 \quad \text{mit} \quad \sigma = \pm 5,4; \\ H(12, 4, 2) &= 21,5 \quad \text{mit} \quad \sigma = \pm 4,4; \\ H(12, 4, 4) &= 19,5 \quad \text{mit} \quad \sigma = \pm 3,7. \end{aligned}$$

2. Beispiel. In der Kundenwerbung hat ein Verfahren immer mehr Verbreitung gefunden, das das Spiel des Zufalls in reizvoller Weise benützt. Den Warenpackungen zahlreicher Gebrauchswaren werden Bilder oder Gutscheine beigelegt, die die Käufer sammeln sollen. Bei dem allgemein beliebten Sammeln der vor dem Kriege den meisten deutschen Zigarettenspackungen beigegebenen mit Nummern versehenen Bilderschecks handelt es sich darum, vollständige Serien der Nummern 1 bis 50 zu erlangen. Der Anreiz zum Sammeln wurde durch sogenannte Freischecks erhöht, die in einem gewissen Prozentsatz vorhanden waren und entsprechend den Nullkugeln unseres Urnenschemas jede der 50 Schecknummern vertreten konnten.

Nimmt man an, daß 1. P% der Gesamtzahl aller Schecks Freischeck waren, 2. die Nummernschecks mit den Nummern 1 bis 50 gleichhäufig vorkamen, 3. die Gesamtzahl aller Schecks sehr groß war und damit praktisch konstante Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Schecks vorlagen, 4. die Verteilung der Schecks auf die Packungen ganz nach dem Zufall erfolgt war, 5. schließlich kein Tausch der übriggebliebenen Schecks zwischen den einzelnen Sammlern stattfand, so gibt die Formel (12) die mittlere Anzahl der Schecks an, die man bis zum Erhalt einer vollständigen Serie

P	b	$H \pm \sigma$
0	0,0000	225 \pm 63
1	0,5051	184 \pm 45
2	1,0204	160 \pm 33
5	2,6316	122 \pm 21
10	5,5556	96 \pm 14
20	12,5000	77 \pm 8
50	50,0000	57 \pm 5
100	∞	50 \pm 0

erwerben mußte. Dabei ist $b = \frac{50P}{100 - P}$ zu setzen.

Die nebenstehende Tabelle enthält auf ganze Zahlen abgerundet für verschiedene Prozentsätze diese Mittelwerte mit den dazugehörigen mittleren Fehlern. Sie zeigt, in welchem starken Maße der Mittelwert 225 durch Beigabe von Freischecks vermindert wird.

Wenn gleichzeitig mehrere Serien gesammelt werden, kommt ein beachtlicher Ausgleich zustande, wie für $P = 0$ in einer früheren Arbeit [2] gezeigt worden ist.

Literatur.

- [1] H. Münzner: Über eine einfache Lösung einer Wahrscheinlichkeitsaufgabe in der Kundenwerbung. Z. math. u. naturw. Unterricht (1934), S. 373—375.
- [2] H. Münzner: Ein Wahrscheinlichkeitsproblem in der Kundenwerbung. Arch. math. Wirtschafts- u. Sozialforschung (1939), S. 116—126.
- [3] E. Netto: Lehrbuch der Combinatorik. 2. Aufl. Leipzig 1927.
- [4] G. Pólya: Eine Wahrscheinlichkeitsaufgabe in der Kundenwerbung. Z. angew. Math. Mech. (1930), S. 96—97.

KLEINE MITTEILUNGEN

Die Beullast dünner Kreisringplatten, die am Außen- und Innenrand gleichmäßigen Druck erfahren¹⁾.

Wird eine Kreisringplatte der Dicke h am Außen- und Innenrand durch einen überall gleichen Druck p beansprucht, so hat man als Plattengleichung in Polarkoordinaten²⁾

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) + \lambda w \right] \right] = 0 \quad (1),$$

wo w die Ausbeulung aus der Plattenebene mißt und $\lambda = \frac{p \cdot h}{N} \left(N = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\mu^2)} \right)$ „Plattenfaktor“ ist. Die

Randbedingungen lauten dabei

a) bei eingespanntem Rande

$$w = 0, \quad \frac{dw}{dr} = 0 \quad (2a);$$

b) bei drehbar gelagertem Rande

$$w = 0, \quad \frac{d}{dr} \left[r \frac{dw}{dr} - (1-\mu)w \right] = 0 \quad (2b).$$

Führt man $\psi = \frac{dw}{dr}$ als neue Veränderliche ein, integriert einmal und dividiert dann noch durch r , so erhält man aus Gl. (1)

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \psi) \right] + \lambda \psi = \frac{c_1}{r} \quad (3)$$

Man sieht leicht, daß

$$\psi_1 = \frac{c_1}{\lambda r} \quad (4)$$

ein partikuläres Integral dieser Differentialgleichung ist. Nach Multiplikation mit r^2 geht Gl. (3) durch die Substitution $z = \sqrt{\lambda} \cdot r$, $c_2 = c_1/\sqrt{\lambda}$ über in

$$z^2 \frac{d^2 \bar{\psi}}{dz^2} + z \frac{d \bar{\psi}}{dz} + (z^2 - 1) \bar{\psi} = c_2 z \quad (5),$$

eine Besselsche Differentialgleichung. Da in Gl. (4) schon ein partikuläres Integral gegeben ist, genügt es, die homogene Gleichung zu integrieren. Man erhält

$$\bar{\psi}(z) = C_1 J_1(z) + C_2 N_1(z) \quad (6).$$

Das allgemeine Integral von Gl. (3) lautet daher

$$\psi(r) = C_1 J_1(\sqrt{\lambda} r) + C_2 N_1(\sqrt{\lambda} r) + \frac{c_1}{\lambda r} \quad (7),$$

und daraus ergibt sich durch Integration

$$w(r) = k_1 J_0(\sqrt{\lambda} r) + k_2 N_0(\sqrt{\lambda} r) + k_3 \ln r + k_4 \quad (8),$$

Für die Randbedingungen nach Gl. (2a, b) am äußeren ($r = r_a$) und am inneren ($r = r_i$) Rand werden noch die folgenden Ausdrücke benötigt:

$$\frac{dw}{dr} = \left[k_1 \sqrt{\lambda} J_1(\sqrt{\lambda} r) + k_2 \sqrt{\lambda} N_1(\sqrt{\lambda} r) - \frac{k_3}{r} \right] \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dw}{dr} - (1-\mu)w \right] = \\ - \left\{ k_1 [\lambda r J_0(\sqrt{\lambda} r) - \sqrt{\lambda} (1-\mu) J_1(\sqrt{\lambda} r)] \right. \\ + k_2 [\lambda r N_0(\sqrt{\lambda} r) - \sqrt{\lambda} (1-\mu) N_1(\sqrt{\lambda} r)] \\ \left. + k_3 \frac{1-\mu}{r} \right\} \quad (9b). \end{aligned}$$

Im Falle eines freien Randes ist $k_3 = 0$.

¹⁾ Mitteilung des Lehrstuhls für angewandte Mathematik (Prof. Dr. Willers) an der Techn. Hochschule Dresden.

²⁾ Fr. A. Willers: Die Stabilität von Kreisringplatten. Z. angew. Math. Mech. 23 (1943), S. 253, Gl. (4).

Aus Gl. (8) und (9a, b) wurde λ für folgende Fälle berechnet:

I. Innen- und Außenrand eingespannt. Aus den Randbedingungen erhält man ein Gleichungssystem für die $k_1 \dots k_4$. Nullsetzen der Determinante liefert mit $r_i/r_a = \varrho$ und $\sqrt{\lambda} r_a = \omega$

$$\begin{aligned} \frac{4}{\omega \pi} - \varrho [J_1(\varrho \omega) N_0(\omega) - J_0(\omega) N_1(\varrho \omega)] \\ + \varrho \omega \ln \varrho [J_1(\varrho \omega) N_1(\omega) - J_1(\omega) N_1(\varrho \omega)] \\ + [J_0(\varrho \omega) N_1(\omega) - J_1(\omega) N_1(\varrho \omega)] = 0 \end{aligned} \quad (10).$$

Für $\varrho \rightarrow 0$ erhält man durch Grenzübergang unter Benutzung der Hankelschen Formel³⁾

$$\frac{4}{\omega \pi} + N_1(\omega) - \frac{2}{\pi} \left[\frac{J_0(\omega)}{\omega} + J_1(\omega) \left(\gamma + \ln \frac{\omega}{2} \right) \right] = 0 \quad (10a),$$

wo $\gamma = 0,57721566 \dots$ die Eulersche Konstante ist.

Ferner ergibt sich hier durch längere Rechnung

$$\left[\frac{d \omega}{d \varrho} \right]_{\varrho=0} = 0 \quad (10b).$$

Zu ähnlichen, etwas komplizierteren Gleichungen, als es Gl. (10) ist, führen die weiterhin untersuchten Fälle

II. Innenrand drehbar gelagert, Außenrand eingespannt;

III. Innenrand eingespannt, Außenrand drehbar gelagert;

IV. Innen- und Außenrand drehbar gelagert;

V. Innenrand eingespannt, Außenrand frei;

VI. Innenrand drehbar gelagert, Außenrand frei.

Setzt man im letzten Fall $\varrho \omega = (1-\varepsilon) \omega$ und entwickelt die in der Gl. (10) entsprechenden Gleichung auftretenden Besselschen und Neumannschen Funktionen in der Umgebung von ω nach Taylor, so erhält man unter Beachtung der Beziehungen

$$J'_0 = -J_1, \quad J'_1 = -J'_0 = J_0 - \frac{1}{x} J_1;$$

$$N'_0 = -N_1, \quad N'_1 = -N'_0 = N_0 - \frac{1}{x} N_1 \quad \text{und}$$

$$J_1(x) N_0(x) - J_0(x) N_1(x) = \frac{2}{\pi x}$$

in der Grenze für $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\omega = \sqrt{1-\mu^2} \quad (11).$$

Es ist der einzige der oben behandelten Fälle, bei dem für $\varrho \rightarrow 1$ ein endlicher Grenzwert existiert.

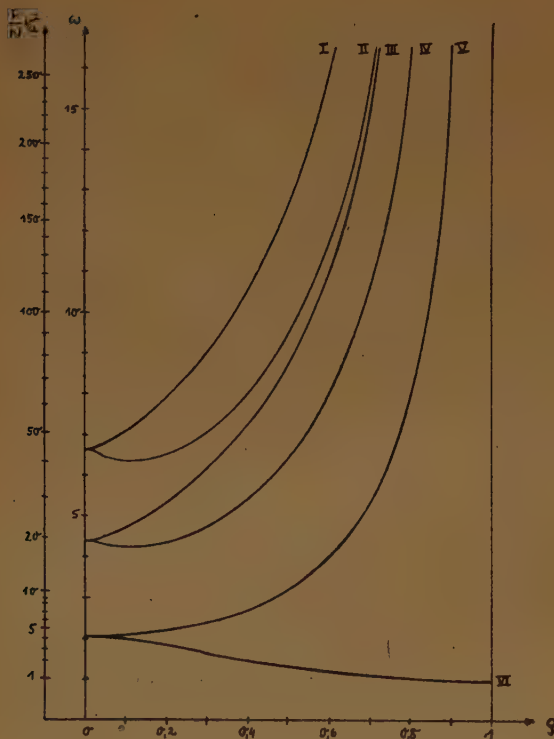
Für die übrigen Fälle kann man aus den Formeln für die Beullasten eines unendlich langen Plattenstreifens⁴⁾ asymptotische Näherungsformeln für ω ableiten, die z. T. schon für kleine Werte von ϱ von den wahren Werten nur um wenige Prozent abweichen.

Die numerischen Rechnungen wurden für den Fall $\mu = 0,3$ durchgeführt und ergaben die in der folgenden Tabelle angegebenen, in nebenstehender Figur dargestellten Resultate. In ihr ist ω als Funktion von ϱ aufgetragen. Eine zweite Skala gestattet, $\omega^2 = \lambda r_a^2$ direkt abzulesen.

³⁾ G. N. Watson: A Treatise on the Theorie of Bessel Functions. Cambridge 1922, S. 62, Formel (3), spezialisiert auf $n = 0$ bzw. $n = 1$. — Vgl. auch Math. Tables VI, Bessel Functions, Part I: Functions of order zero and unity. Cambridge 1937, S. 174.

⁴⁾ Fr. A. Willers: Das Ausbeulen von Plattenstreifen, deren Dicke sich sprunghaft ändert. Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens 10 (1939), S. 231—232.

ϱ	ω_I	ω_{II}	ω_{III}	ω_{IV}	ω_V	ω_{VI}
0	6,648	6,648	4,401	4,401	2,049	2,049
0,05	6,815	6,454	4,535	4,278	—	—
0,1	7,115	6,307	4,762	4,205	2,088	1,977
0,2	7,926	6,476	5,360	4,341	2,204	1,801
0,3	9,021	7,058	6,156	4,749	2,404	1,613
0,4	10,501	8,001	7,226	5,410	2,714	1,452
0,5	12,586	9,416	8,726	6,401	3,183	1,323
0,6	15,721	11,604	10,976	7,933	3,924	1,220
0,7	20,953	15,305	14,725	10,523	5,194	1,135
0,8	31,421	22,759	22,217	15,738	7,780	1,066
0,9	62,833	45,199	44,688	31,429	15,605	1,005
1	—	—	—	—	—	0,954



Der Einfluß, den μ auf ω hat, ist im allgemeinen sehr gering; z. B. ergab sich im Falle III bei $\varrho = 0,5$ die in der folgenden Tabelle gezeigte Abhängigkeit. Es muß jedoch berücksichtigt werden, daß μ auch in den Plattenfaktor eingeht, und dieser Einfluß auf die Beullast $P (= \varphi \cdot h)$ ist beträchtlich, wie die dritte Zeile der Tabelle zeigt.

μ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
ω	8,606	8,647	8,687	8,726	8,765	8,803
$Pr_a^2 = \frac{\omega^2}{Eh^3} \cdot \frac{1}{12(1-\mu^2)}$	6,172	6,294	6,551	6,973	7,622	8,610

Sehr auffällig ist der Verlauf der Kurven II, IV und VI. Durch Verallgemeinerung eines Satzes von Courant⁵⁾ ergibt sich nämlich folgender Satz: Sind die Eigenwerte Courantsche Maximum-Minimum-Werte eines quadratischen Variationsproblems n -ter Ordnung und sind auf einem Teil des Randes unter den Randbedingungen die folgenden enthalten:

$$y = y' = y'' = \dots = y^{(n-1)} = 0,$$

so werden sämtliche Eigenwerte größer, wenn man

⁵⁾ R. Courant und D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik I. 2. Auflage, Berlin 1931, S. 355.

diesen Randteil so verschiebt, daß das neue Gebiet ein Teil des ursprünglichen ist.

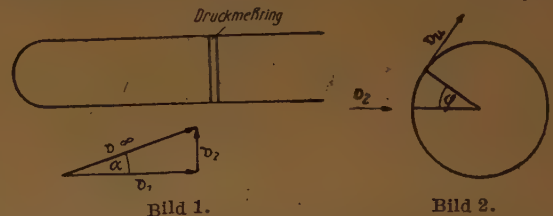
Daß dieser Satz nicht zu gelten braucht, wenn diese Bedingungen nicht sämtlich erfüllt sind, zeigen die Kurven II, IV und VI. Hier ist $n = 2$, und es muß also an dem verschobenen Randteil $y = y' = 0$ sein; in den Fällen II, IV und VI, bei denen am inneren Rand die Bedingung $y' = 0$ nicht erfüllt ist, wächst mit kleiner werdendem Innenradius von 0,1 ab (im Fall VI schon von $\varrho = 1$ ab), also bei größer werdendem Gebiet, die Beullast. Das ist allerdings durchaus plausibel, da mit kleiner werdender Innenöffnung die Plattensteifigkeit zunimmt.

Dresden.

A. Schubert.

Eine Bemerkung zur Neigungsempfindlichkeit des Prandtlrohres bei Messung des statischen Druckes.

Ein Prandtlrohr werde mit der Geschwindigkeit v_∞ unter dem Winkel α angeblasen. Wir zerlegen v_∞ in eine Komponente v_1 in Richtung der Rohrachse ($v_1 = v_\infty \cos \alpha$) und in eine Komponente v_2 senkrecht dazu ($v_2 = v_\infty \sin \alpha$; vgl. Bild 1).



Betrachten wir die Ebene des Druckmeßringes (vgl. Bild 2), so ergibt sich als Betrag der Geschwindigkeit am Druckmeßring $v_u = 2 v_2 |\sin \varphi|$ und damit

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{v_1^2 + v_u^2} \\ &= \sqrt{v_\infty^2 \cos^2 \alpha + 4 v_\infty^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi} \\ &= v_\infty \sqrt{\cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (1).$$

Nach Bernoulli folgt daraus

$$\frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2} = 1 - \left(\frac{v}{v_\infty} \right)^2 \quad \dots \quad (2).$$

(1) und (2) liefern

$$\frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2} = \sin^2 \alpha \cdot (1 - 4 \sin^2 \varphi) \quad \dots \quad (3).$$

Integration über den gesamten Druckmeßring und Division durch 2π führt zu dem Wert, den das Prandtlrohr theoretisch anzeigen müßte¹⁾:

$$\frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2} = \frac{\sin^2 \alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - 4 \sin^2 \varphi) d\varphi = -\sin^2 \alpha \quad \dots \quad (4).$$

Wir wollen nun zeigen, daß der gleiche Wert wie bei (4) auch in den folgenden Fällen theoretisch angezeigt werden müßte:

I. Die Druckmeßstellen bilden einen kontinuierlichen Halbkreis. Dabei ist die Lage der Druckmeßstellen zur Richtung von v_2 gleichgültig.

Dieser Fall ergibt sich sofort aus

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\pi} \int_0^\pi (1 - 4 \sin^2 \varphi) d\varphi = -\sin^2 \alpha.$$

¹⁾ Wir setzen hierbei voraus, daß sich der arithmetische Mittelwert des Druckes einstellt.

II. Die Druckmeßstellen bestehen aus $n (> 2)$ einzelnen Bohrungen, die gegeneinander um den gleichen Winkel $\frac{2\pi}{n}$ versetzt sind. Auch hier kommt es nicht auf die Lage der Bohrungen hinsichtlich der Richtung von v_2 an.

Um dies zu beweisen, betrachten wir auf Grund von (3) folgende Summe

$$\left. \begin{aligned} \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2} &= \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \left[1 - 4 \sin^2 \left(\varphi + \nu \frac{2\pi}{n} \right) \right] \cdot \sin^2 \alpha \\ &= \frac{\sin^2 \alpha}{n} \left[n - 4 \sum_{\nu=0}^{n-1} \sin^2 \left(\varphi + \nu \frac{2\pi}{n} \right) \right] \end{aligned} \right\} (5).$$

Für $n = 1$ und $n = 2$ ergibt (5)

$$\frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2} = \sin^2 \alpha \cdot (1 - 4 \sin^2 \varphi),$$

also einen von φ abhängigen Wert.

Zur Berechnung von

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \sin^2 \left(\varphi + \nu \frac{2\pi}{n} \right)$$

müssen wir diese Summe in geeigneter Weise umformen:

$$\left. \begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{n-1} \sin^2 \left(\varphi + \nu \frac{2\pi}{n} \right) \\ &= \sum_{\nu=0}^{n-1} \left(\sin \varphi \cos \nu \frac{2\pi}{n} + \cos \varphi \sin \nu \frac{2\pi}{n} \right)^2 \\ &= \sum_{\nu=0}^{n-1} \left(\sin^2 \varphi \cos^2 \nu \frac{2\pi}{n} + \cos^2 \varphi \sin^2 \nu \frac{2\pi}{n} \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \nu \frac{2\pi}{n} \cos \nu \frac{2\pi}{n} \right) \\ &= \sin^2 \varphi \sum_{\nu=0}^{n-1} \cos^2 \nu \frac{2\pi}{n} + \cos^2 \varphi \sum_{\nu=0}^{n-1} \sin^2 \nu \frac{2\pi}{n} \\ &\quad + \sin 2\varphi \sum_{\nu=0}^{n-1} \sin \nu \frac{2\pi}{n} \cos \nu \frac{2\pi}{n} \end{aligned} \right\} (6).$$

Wegen

$$\sin \nu \frac{2\pi}{n} = -\sin (n - \nu) \frac{2\pi}{n}$$

und

$$\cos \nu \frac{2\pi}{n} = \cos (n - \nu) \frac{2\pi}{n}$$

ist die letzte Summe von (6) gleich Null. Zur Berechnung von

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \cos^2 \nu \frac{2\pi}{n} \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=0}^{n-1} \sin^2 \nu \frac{2\pi}{n}$$

gehen wir von der Gleichung

$$x^n - 1 = 0 \quad \dots \quad (7)$$

aus, die die Wurzeln

$$e^{i\nu \frac{2\pi}{n}} = \cos \nu \frac{2\pi}{n} + i \sin \nu \frac{2\pi}{n}$$

besitzt. ($\nu = 0, 1, 2, \dots, n-1$). Die Koeffizienten der Gl. (7) sind bis auf das Vorzeichen die symmetrischen Grundfunktionen ihrer Wurzeln, d. h. für $n > 2$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} e^{i\nu \frac{2\pi}{n}} = 0,$$

p. h.

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \cos \nu \frac{2\pi}{n} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \sin \nu \frac{2\pi}{n} = 0;$$

$$\sum_{\substack{\mu, \nu=0 \\ \mu < \nu}}^{n-1} e^{i\mu \frac{2\pi}{n}} \cdot e^{i\nu \frac{2\pi}{n}} = \sum_{\substack{\mu, \nu=0 \\ \mu < \nu}}^{n-1} e^{i(\mu + \nu) \frac{2\pi}{n}} = 0,$$

(8).

d. h.

$$\sum_{\substack{\mu, \nu=0 \\ \mu < \nu}}^{n-1} \cos (\mu + \nu) \frac{2\pi}{n}$$

$$= \sum_{\substack{\mu, \nu=0 \\ \mu < \nu}}^{n-1} \sin (\mu + \nu) \frac{2\pi}{n} = 0$$

Nach den Newtonschen Formeln über den Zusammenhang zwischen symmetrischen Grundfunktionen und Potenzsummen folgt nun sofort

$$\left. \begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{n-1} \cos^2 \nu \frac{2\pi}{n} - \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} \cos \nu \frac{2\pi}{n} \right)^2 \\ &+ 2 \sum_{\substack{\mu, \nu=0 \\ \mu < \nu}}^{n-1} \cos \mu \frac{2\pi}{n} \cos \nu \frac{2\pi}{n} = 0; \\ &\sum_{\nu=0}^{n-1} \sin^2 \nu \frac{2\pi}{n} - \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} \sin \nu \frac{2\pi}{n} \right)^2 \\ &+ 2 \sum_{\substack{\mu, \nu=0 \\ \mu < \nu}}^{n-1} \sin \mu \frac{2\pi}{n} \sin \nu \frac{2\pi}{n} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (9).$$

Durch Subtraktion der zweiten Gleichung von (9) von der ersten erhalten wir unter Berücksichtigung von (8)

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \left(\cos^2 \nu \frac{2\pi}{n} - \sin^2 \nu \frac{2\pi}{n} \right) = 0 \quad \dots \quad (10).$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{n-1} \cos^2 \nu \frac{2\pi}{n} &= \sum_{\nu=0}^{n-1} \sin^2 \nu \frac{2\pi}{n} \\ &= \sum_{\nu=0}^{n-1} \left(1 - \cos^2 \nu \frac{2\pi}{n} \right) \end{aligned}$$

und

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \cos^2 \nu \frac{2\pi}{n} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \sin^2 \nu \frac{2\pi}{n} = \frac{n}{2} \quad \dots \quad (11).$$

Dies liefert, in (6) eingesetzt,

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \sin^2 \left(\varphi + \nu \frac{2\pi}{n} \right) = \frac{n}{2} \quad \dots \quad (12).$$

(5) und (12) führen schließlich zu

$$\frac{p - r_\infty}{\frac{q}{2} v_\infty^2} = \frac{\sin^2 \alpha}{n} [n - 2n] = -\sin^2 \alpha \quad (13).$$

Vergleichen wir die theoretischen Werte von $\frac{p - r_\infty}{\frac{q}{2} v_\infty^2}$

mit gemessenen²⁾, so sehen wir, daß die Meßpunkte von $\alpha = 0^\circ$ bis $\alpha = 20^\circ$ sehr gut mit der Theorie übereinstimmen, bei höheren Werten von α aber merklich abweichen. Die folgende Zahlentafel veranschaulicht diesen Sachverhalt:

α°	$\left(\frac{p - r_\infty}{\frac{q}{2} v_\infty^2} \right)_{\text{theor.}}$	$\left(\frac{p - r_\infty}{\frac{q}{2} v_\infty^2} \right)_{\text{gemessen}}$
10°	-0,030	-0,028
20°	-0,117	-0,110
30°	-0,250	-0,210
40°	-0,413	-0,270

Die Unterschiede bei größerer Schräganblasung können so erklärt werden; betrachten wir die Ebene des Druckmeßringes, so wird in ihr ein Kreis mit der Anströmgeschwindigkeit v_2 umströmt. Nun ist bekannt, daß bei der Umströmung eines Zylinders die beobachtete Druckverteilung mit der theoretischen nur auf der Vorderseite übereinstimmt³⁾. Die Rückseite wird durch Ablösungserscheinungen gestört. Wir können vermuten, daß dies auch der Grund für die Unterschiede zwischen Theorie und Messung in der vorliegenden Zahlentafel ist. Der Einfluß dieser Ablösungserscheinungen wächst mit v_2 , d. h. mit dem Winkel α . Da nach I theoretisch bereits ein „halber Druckmeßring“ ausreicht, um den gleichen Wert des statischen Druckes wie ein gewöhnliches Prandtlrohr mit „ganzem Druckmeßring“ zu liefern, wäre folgendes Experiment aufschlußreich: man messe den Einfluß der Schräganblasung bei einem Prandtlrohr, dessen statische Druckmeßstellen einen Halbkreis bilden, und drehe das Prandtlrohr so um seine Achse, daß dieser Druckmeßhalbkreis einmal an der der Strömung zugewandten, das andere Mal an der der Strömung abgewandten Seite gelegen ist.

Oberammergau. Hans-Joachim Kanold.

¹⁾ Vgl. Wien-Harms, Leipzig 1932, IV, 1, S. 495, Fig. 11. Neigungsempfindlichkeit des Prandtlrohres bei Messung des statischen Druckes mit scharfer Schlitzkante.

²⁾ Vgl. Glauert-Holl: Die Grundlagen der Tragflügel- und Luftschrauben-Theorie. Berlin 1929, S. 29, Abb. 14.

Die günstigste Verteilungsbreite, ein neues Streuungsmaß.

Im folgenden soll ein Verfahren erläutert werden, welches bei der Auswertung statistischer Verteilungen verwendet werden kann. Insbesondere soll dieser Aufsatz zur Bekanntmachung eines neuartigen Streuungsmaßes dienen. Die Notwendigkeit der Einführung dieses neuen Maßes ergab sich aus praktischen Bedürfnissen. Seine Anwendung ist besonders für die schiefen Verteilungen gedacht.

Neben einem speziellen Mittelwert (arithmetisches Mittel, häufigster Wert, Zentralwert), dessen Wahl sich je nach dem Zweck richtet, der mit der statistischen Erhebung verfolgt wird, läßt sich bei der schiefen Verteilung mit Vorteil der neue Streuungsfaktor als Maß für die Anordnung der einzelnen Meßwerte innerhalb der Verteilung verwenden. Wie der wahrscheinliche Fehler bei der normalen Gauss'schen Verteilung, soll sich auch hier dieser Wert auf die Hälfte der Fläche unterhalb der Verteilungskurve beziehen, und zwar

soll das Flächenstück so gewählt werden, daß die Abszissendifferenz der beiden Begrenzungsordinaten der Fläche möglichst klein wird, mit anderen Worten soll also die günstigste 50%ige Verteilungsbreite auf der Abszissenachse ermittelt werden. Die Aufgabe läuft also darauf hinaus, das Minimum der Abszissendifferenz zu bestimmen.

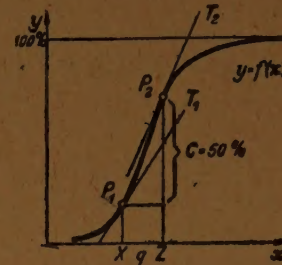


Bild 1.

Zu diesem Zwecke sei folgende analytische Betrachtung eingeschaltet. Nebenstehende Skizze (Bild 1) stellt die Integralkurve $y=f(x)$ der Verteilungsfunktion $y'=f'(x)$ dar.

x und z sind die Begrenzungsabszissen des Flächenstücks,

q ist die sogenannte Verteilungsbreite,

$C = \text{const.} = 50\%$ ist der Ausdruck für die halbe Fläche.

Die Tangenten T_1 und T_2 in den P_1 und P_2 mit den Differentialquotienten y'_x und y'_z veranschaulichen die Begrenzungsordinaten in der Verteilungsfunktion. Die Abszissendifferenz q ist definiert als $q = z - x$. Hier ist

$$z = \varphi'(x) = F(f(x) + C) = F(y_z).$$

Zur Ermittlung des Minimums wird die erste Ableitung gebildet und gleich „Null“ gesetzt.

$$\frac{dq}{dx} = F'(f(x) + C) \cdot f'(x) - 1; \quad \frac{dq}{dx} = 0;$$

$$F'(f(x) + C) \cdot f'(x) = 1; \quad F'(f(x) + C) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dx} \right)_z$$

Das Minimum wird also dann erreicht, wenn die Differentialquotienten an den Stellen x und z gleich sind, mit anderen Worten, wenn das betrachtete Flächenstück in der Verteilungskurve von gleich großen Begrenzungsordinaten y'_x und y'_z begrenzt wird.

Auf Grund dieser Tatsache wird nun ein graphisches Lösungsverfahren zur Ermittlung der günstigsten Verteilungsbreite entwickelt. Voraussetzung für die Durchführung des Verfahrens ist, daß bereits die ausgeglichene Verteilungskurve vorliegt.

Zu dieser Kurve wird in bekannter Weise die Integralkurve konstruiert. Damit der Rahmen der Zeichnung nicht überschritten wird, wählt man als Einheit in der Ordinatenrichtung $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$ der Einheit der Abszissenachse. Hierzu wird noch eine dritte Kurve (Lösungskurve) in folgender Weise gezeichnet. Im Punkte x_1 wird die Senkrechte errichtet, die die Verteilungskurve wie auch die Integralkurve schneidet (Bild 2). Durch den Schnittpunkt mit der Verteilungskurve P_{01} wird die Parallele zur x -Achse gezogen, welche die Verteilungskurve zum zweitenmal in P_{02} schneidet. Das Lot auf die x -Achse schneidet die Integralkurve in P_{J1} . Die Parallele zur x -Achse durch P_{J2} trifft die Senkrechte über x_1 im Punkte Q . Der Natur der Integralkurve entsprechend ist der Abstand $Q - P_{J1}$ gleich dem Flächeninhalt der Verteilungskurve zwischen x_2 und x_1 . Die Strecke $Q - P_{J1}$ wird nun von

x_1 aus auf der Strecke $x_1 - P_{j1}$ abgetragen. Das Verfahren wird nun fortgesetzt, indem man den Punkt P mit der Abszisse x_1 , eine Reihe von Werten durch

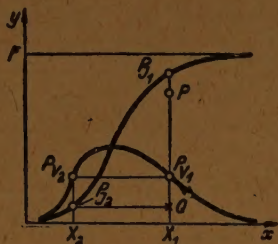


Bild 2.

laufen läßt. Auf diese Weise ergibt sich eine Reihe von Punkten P, P', P'' usw., welche durch einen stetigen Kurvenzug verbunden werden (Bild 3). Der auf diese Weise gewonnene Kurvenzug stellt die Beziehung $F = f(x)$ dar. Definitionsgemäß sollte sich das neue Streuungsmaß auf die Fläche $\frac{1}{2}$ beziehen. Eine Parallele zur x -Achse durch $F/2$ schneidet diese Kurve in R und die Integralkurve in S . Das Lot von R auf die x -Achse schneidet die Verteilungskurve in P_{v1} . Die Parallele zur x -Achse durch \bar{P}_{v1} schneidet die Verteilungskurve zum zweitenmal in \bar{P}_{v2} . Die Differenz der beiden zugehörigen Argumente $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = v$ ist die gesuchte günstigste Verteilungsbreite. Das Lot von S auf die x -Achse gefällt, ergibt den Punkt W . Bekanntlicherweise ist dies der sogenannte Zentral- oder wahrscheinlichste Wert, der die Fläche unterhalb der Verteilungskurve halbiert.

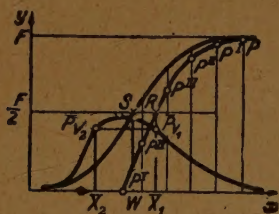


Bild 3.

Die praktische Durchführung des oben dargestellten Verfahrens bietet keine besonderen Schwierigkeiten, der Zeitbedarf ist etwas größer als bei der rechnerischen Behandlung einer normalen Verteilung nach der üblichen Methode. Demgegenüber steht aber die Tatsache, daß das dargelegte graphische Verfahren einer allgemeinen Anwendbarkeit zugänglich ist und nicht auf die sogenannten normalen Verteilungen beschränkt ist. Als einzige, wesentliche Schwierigkeit macht sich zuweilen die Vorbereitung der Verteilung für die Durchführung des Verfahrens geltend. Voraussetzung ist nämlich eine gut ausgeglichene Verteilungskurve, damit die gewonnenen Ergebnisse am Schluß nicht illusorischen Charakter tragen. Verfasser geht hierbei folgendermaßen vor:

Erfahrungsgemäß läßt sich bereits während der Erhebung der Statistik mit großer Sicherheit eine Aussage über die Stabilität der Verteilung treffen. Zeigt sich hierbei im allgemeinen ein ruhiges und ausgeglichenes Verhalten, so werden die beim Abschluß erhaltenen Werte, als mit nur sehr geringen Zufälligkeiten behaftet, betrachtet und durch einen gleichmäßigen glatten Kurvenzug „nach dem Augenmaß“ ausgeglichen. Zeigt sich jedoch bereits während der Erhebung ein unruhiges Verhalten der Statistik, so daß sich am Schluß eine recht zerklüftete Verteilungskurve ergibt, so empfiehlt sich eine sorgfältige Ausgleichung nach dem sogenannten „Verfahren der glei-

tenden Durchschnitte“. Dieses Verfahren kann in wiederholter Weise so oft auf die Verteilung angewendet werden, als es für eine gute Ausgleichung notwendig erscheint, bzw. als es für die hierdurch verursachte Deformation der ursprünglichen Verteilung eben noch zuträglich ist.

Haldensleben.

K. Wisseroth.

Über eine Zustandsgleichung mit Berücksichtigung des kritischen Koeffizienten.

Unter der Annahme, daß in einer homogenen im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit der äußere Druck p [kg/m²] vermehrt um den Kohäsionsdruck gleich dem thermischen Abstoßungsdruck plus einer zusätzlichen (molekularen) Abstoßung ist, gelangt man zu folgender Zustandsgleichung:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right) = \left(\frac{RT}{v} + \frac{b}{v^n}\right) \dots \dots \dots (1).$$

Hierin bedeuten:

- v in m³/kg das spezifische oder kg-Volumen,
 - T die abs. Temperatur in Grad Kelvin,
 - R die spezielle Gaskonstante in kgm/Grad,
 - a, b und n aus den kritischen Daten und der Gaskonstanten R zu bestimmende Festwerte,
 - p_k [kg/m²], v_k [m³/kg] und T_k [°K] die kritischen Daten.
- Zur Bestimmung der 3 Festwerte a, b und n stehen 3 Gleichungen zur Verfügung und zwar:

1. die Zustandsgleichung,
2. die Bedingung: $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{T=T_k} = 0$, für $v = v_k$
(horizontale Tangente im kritischen Punkt),
3. die Bedingung: $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_{T=T_k} = 0$, für $v = v_k$
(kritischer Punkt = Wendepunkt).

Nach Einführung des kritischen Koeffizienten $k = \frac{RT_k}{p_k v_k}$ oder dessen Kehrwertes $x = 1/k = \frac{p_k v_k}{RT_k}$ ergeben sich die Festwerte von Gl. (1) wie folgt:

$$a = p_k v_k^2 / (4x - 1),$$

$$b = \frac{v_k^3 p_k (1 - 2x)^2}{x(4x - 1)} \text{ und } n = \frac{1}{1 - 2x}.$$

Nach Einführung der dimensionslosen oder reduzierten Drucke, Volumina und Temperaturen:

$$p_x = p/p_k, \quad v_x = v/v_k \text{ und } T_x = T/T_k$$

erhält man die dimensionslose Form von Gl. (1):

$$p_x = \frac{T_x}{x v_x} - \frac{1}{(4x - 1) v_x^2} + \frac{(1 - 2x)^2}{x(4x - 1) v_x^n} \dots (2),$$

in welcher außer den (dimensionslosen) Zustandsvariablen p_x, v_x, T_x nur der kritische Koeffizient k bzw. dessen Kehrwert x vorkommt.

Die Kenngröße x bewegt sich etwa in den Grenzen von 0,2 (Essigsäure) bis 0,327 (Helium). Während sich aus bekannten Zustandsgleichungen nur ein einziger für alle Stoffe gültiger Wert von x (z. B. $\frac{3}{8} = 0,375$ bei van der Waals und $\frac{4}{15} = 0,267$ bei A. Wohl) ergibt, ist in der Gl. (2) der wirkliche, von Stoff zu Stoff verschiedene Wert des kritischen Koeffizienten verwendet.

Für verschiedene Stoffe ergeben sich sonach verschiedene (spezielle) Zustandsgleichungen, wie z. B. für Kohlensäure (CO₂) mit $x = 0,276$:

$$p_x = 3,625 \frac{T_x}{v_x} - \frac{9,62}{v_x^2} + \frac{7}{v_x^{2,23}} \dots \dots \dots (3)$$

oder für Wasserstoff (H_2) mit $x = 0,306$:

$$p_x = 3,27 \frac{T_x}{v_x} - \frac{4,465}{v_x^2} + \frac{2,195}{v_x^{2,578}} \dots \dots (4).$$

Für Stoffe mit $x < 0,25$ wird $(4x - 1)$ negativ, und die Glieder 2 und 3 der rechten Seite von Gl. (2) vertauschen ihre Vorzeichen; so lautet z. B. Gl. (2) für Wasser mit $x = 0,225$:

$$p_x = 4,45 \frac{T_x}{v_x} + \frac{10}{v_x^2} - \frac{13,45}{v_x^{1,82}} \dots \dots (5)$$

oder für Ammoniak (NH_3) mit $x = 0,243$:

$$p_x = 4,115 \frac{T_x}{v_x} + \frac{35,7}{v_x^2} - \frac{38,82}{v_x^{1,945}} \dots \dots (6).$$

Für große Volumina v_x geht Gl. (2) in die dimensionslose Gasgleichung:

$$p_x = \frac{T_x}{x v_x} \dots \dots (7)$$

über, die mit $p v = R T$ identisch ist.

Berücksichtigt man die Temperaturabhängigkeit des Kohäsions- und Abstoßungsgliedes in erster Näherung durch den Ansatz:

$$p_x = \frac{T_x}{x v_x} - \frac{1}{T_x (4x - 1) v_x^2} + \frac{(1 - 2x)^2}{T_x (4x - 1) v_x^3} \dots (8),$$

so wird die Anfangsneigung der Dampfdruckkurve für den kritischen Punkt im $p_x T_x$ -Diagramm:

$$\lg \alpha = \left(\frac{\partial p_x}{\partial T_x} \right)_{v_x=1} = \frac{2}{x} - 1 = 2k - 1 \dots (9).$$

In Zahlentafel 1 sind die nach Gl. (9) berechneten Werte von $\lg \alpha$ den experimentell bestimmten (nach W. Schüle, Techn. Thermodynamik, II. Aufl. II. Bd. S. 80) für einige Stoffe gegenübergestellt.

Zahlentafel 1.

	H_2	CO_2	NH_3	H_2O
$x = 1/k \dots \dots \dots$	0,306	0,276	0,243	0,225
$\lg \alpha = 2k - 1 \dots \dots \dots$	5,54	6,248	7,235	7,9
$\lg \alpha$ gemessen $\dots \dots \dots$	5,11	6,400	6,910	7,4

Die berechneten stimmen mit den gemessenen nur annähernd überein; doch ist der Gang beider Reihen der gleiche und der Vorteil ersichtlich, den die Einführung des kritischen Koeffizienten in die Zustandsgleichung mit sich bringt.

Wien.

C. K ä m m e r e r.

NACHRICHTEN

Mathematiker-Tagung in Tübingen.

In der Zeit vom 23. bis 27. September 1946 fand in Tübingen die erste Mathematiker-Tagung seit dem Ende des Krieges statt. Sie war von den dortigen Kollegen aufs sorgfältigste vorbereitet worden. Etwa 140 Mathematiker aus allen Zonen Deutschlands und dem Ausland nahmen an ihr teil. Von den 44 Vorträgen gehörten die folgenden fünf dem Gebiete der angewandten Mathematik an:

O. Baier, Über die Hurwitzschen Bedingungen.

L. Collatz, Lösung gewisser Differentialgleichungen mit dem harmonischen Analysator.

G. Hamel, Aus der analytischen Mechanik.

W. Quade, Auflösung linearer Gleichungen durch Matrizeniteration.

G. Schulz, Das Summenproblem bei mehrdimensionalen arithmetischen Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

In besonderen Sitzungen wurden ferner organisatorische, sowie Unterrichts- und Prüfungsfragen besprochen.

G. Schulz (Aachen).

Die „ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK“ kann in der sowjetischen Zone, außer Berlin, durch Abonnementsbestellung bei jedem Postamt, beim Buchhandel oder vom Verlag bezogen werden. (Postscheck-Konto: Berlin 35021, oder Bank-Konto: Berliner Stadtkontor Konto-Nummer 758).

In den Westzonen ist der Bezug nur durch den Buchhandel oder vom Verlag möglich. (Konto des Verlages: Bayerische Vereinsbank Nürnberg, Konto-Nummer 11981). Für Postscheckzahlungen kann auch das Postscheck-Konto der Bayerischen Vereinsbank, Postscheckamt Nürnberg Konto-Nummer 90, benutzt werden. Auf dem Zahlungsabschnitt bitten wir zu vermerken: für Akademie-Verlag Konto-Nr. 11981 „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik“.

Bezugspreis: RM 15.— vierteljährlich, zuzüglich Postbestellgeld oder Porto.

A K A D E M I E - V E R L A G G M B H · B E R L I N C 2

Verantwortlich für den Inhalt: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Dresden; für den Verlag: H. Kaesser, Berlin. Verlag: Akademie-Verlag GmbH., Berlin N 4, Chausseest. 106, Fernsprecher: 42 50 01 (Verlag App. 274, Vertrieb App. 275), Postscheckkonto: Berlin 35 021. Bestell- und Verlagsnummer dieses Heftes: 1009/25—27/4. Die Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik erscheint monatlich. Bezugspreis: Vierteljährlich RM 15.— zuzüglich Bestellgeld, Einzelheft RM 6.—. Verantwortlich für den Anzeigenteil: Curt F. W. Schreiber, Berlin. Druck: Julius Beltz, Langensalza. (Th. B.-Nr. 04011/16b) — Nr. 954. — Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 245 der Sowjetischen Militär-Verwaltung in Deutschland.